Ralf Bülow

UNTERSUCHUNGEN ZUR INTENSIONALEN LOGIK

Dissertation

Bonn
1980

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546508_0008

UNTERSUCHUNGEN ZUR

INTENSIONALEN LOGIK

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades

der

Hohen Mathem. - Naturw. Fakultät

der

Rheinischen Friedrich - Wilhelms - Universität

zu

Bonn

vorgelegt von

Ralf Bülow

aus

Gelsenkirchen - Buer

1980

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Angefertigt mit Genehmigung der Mathem.-Naturw. Fakultät
der Universität Bonn

Referent: Prof. Dr. Hasenjaeger
Korreferent: Prof. Dr. Ziegler

Tag der Promotion: 18. 6. 80

Inhalt:

Abkürzungsliste

Einleitung

Philosophische Vorbemerkungen

Beweisverfahren für die Modallogik

- Zwei Systeme der Modallogik
- Übersetzungen und korrespondierende Interpretationen
- Überblick über den Beweisalgorithmus

Ein System der intensionalen Logik

- Die Sprache $\underline{S}$
- Korrektheit und Vollständigkeit von $A_{\underline{S}}$
- Ein Beweisverfahren für die intensionale Logik

Literaturverzeichnis

Abkürzungsliste

U^n	n - faches kartesisches Produkt der Menge U
2^N	Potenzmenge der Menge N
M^N	Menge der Abbildungen von der Menge N in die Menge M
$\bigcup_{i \in N} N_i$	Vereinigung aller Mengen N_i , $i \in N$
max M	größtes Element der Menge M
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen ohne Null
$\Rightarrow$	wenn ..., dann ...
$\Leftarrow$	nur dann ..., wenn ...
$\Leftrightarrow$	... genau dann, wenn ...
$:=$	definitionsgemäß gleich

Einleitung

In den letzten zwei Jahrzehnten hat sich die Logik verstärkt mit Systemen beschäftigt, die bestimmte natürlichsprachige Sätze besser erfassen als Prädikatenlogik oder Typentheorie es tun. Es handelt sich einmal um Systeme der Modallogik (für Sätze mit "Es ist notwendig, daß" u.ä.), zum anderen um Systeme der intensionalen Logik (für beliebige Aussagesätze).

Unsere Arbeit befaßt sich im ersten Teil mit zwei modallogischen Systemen, für die bzgl. der Kripke - Semantik ein Vollständigkeitssatz existiert. Wir geben für jedes System ein Verfahren an, das Formeln der Modallogik in solche der Prädikatenlogik mit Gleichheit übersetzt (vgl. hierzu das Verfahren in Jaśkowski (1951)), und zeigen: eine modallogische Formel ist genau dann Theorem eines der beiden Systeme, wenn die jeweilige Übersetzung Theorem der Prädikatenlogik mit Gleichheit ist. Da nun für diese Beweisalgorithmen bekannt sind, gewinnt man so auch einen Beweisalgorithmus für die Modallogik (zu maschinellen Beweisverfahren vgl. Chang & Lee (1973); ein anderes Beweisverfahren für die Modallogik findet sich in Wrightson (1979)).

Im zweiten Teil der Arbeit geben wir einen Kalkül für eine intensionale Logik an, der den der Prädikatenlogik mit Gleichheit enthält; bei der logischen Sprache und ihrer Semantik orientieren wir uns z.T. an Richard Montague (vgl. Montague (1974)). Wir beweisen, ausgehend von Ideen aus Hughes & Cresswell (1968), die Korrektheit und Vollständigkeit dieses Kalküls (ein ähnlicher Satz, allerdings für einen etwas anderen Kalkül und eine etwas andere Semantik, findet sich in Gallin (1975), Theorem 4.2.). Schließlich formulieren wir für unseren Kalkül einen Beweisalgorithmus und zeigen seine Korrektheit (zur maschinellen Behandlung intensionaler Logik vgl. Hobbs & Rosenschein (1977)).

Ich danke Herrn Prof. Dr. Hasenjäger für die Unterstützung dieser Arbeit und Herrn Prof. Dr. Reichl für sein Interesse an einigen linguistischen Aspekten, die sich im Laufe der Arbeit ergaben. Auch geht mein Dank an die Konrad - Adenauer - Stiftung für die großzügige finanzielle Unterstützung.

Philosophische Vorbemerkungen

In der vorliegenden Arbeit geht es um zwei logische Sprachen - der der Modal- und der der intensionalen Logik - und ihre Interpretationen: diese sind im ersten Fall Quadrupel aus einer Objektmenge, einer Indexmenge, einer zweistelligen Relation zwischen den Indizes und einer Menge von Belegungen, im zweiten Fall Tripel aus Objekt-, Index- und Belegungenmenge. Bei unserer Untersuchung bewegen wir uns meist im rein technischen Bereich d.h. wir vermeiden es nach Möglichkeit, uns in irgendeiner Weise philosophisch zu äußern (solch eine philosophische Äußerung wäre es z.B., in den Interpretationen explizit eine Menge möglicher Welten aufzunehmen, was ganz bestimmte metaphysische Annahmen voraussetzt). Wir halten es aber für durchaus sinnvoll, Definitionen und Sätze philosophisch zu deuten (man könnte auch "interpretieren" sagen, aber dies führte leicht zu Verwechslungen mit den rein logischen Interpretationen), und wir wollen an dieser Stelle einige Deutungen der Semantik anführen:

1. Die "klassische" Deutung der modalen Semantik: man faßt Notwendigkeit in einer Welt auf als Gültigkeit in allen möglichen Welten oder zumindest in den Welten, die von jener "erreichbar" sind (etwa, daß man sie sich vorstellen kann). Dementsprechend fungieren bei einer modallogischen Interpretation die Indizes als Namen möglicher Welten, und die Relation drückt Erreichbarkeit zwischen diesen aus. Eine Formel $\Box P$ ($\Box$ heißt soviel wie "Es ist notwendig" oder "Es gilt mit Notwendigkeit") wird so genau dann wahr bzgl. einer Welt, wenn P in allen von dieser Welt erreichbaren Welten wahr wird (vgl. die Literatur zur Modallogik).

2. Die Sachverhaltsdeutung der intensionalen Semantik: hierbei sieht man Sachverhalte als Eigenschaften von Welten an (mit dem Wort "Sachverhalt" meinen wir nicht unbedingt einen tatsächlich bestehenden, sondern einen möglichen, der aber durchaus in unserer Welt vorliegen kann), und einen Satz wie "Es wird geglaubt, daß es regnet" interpretieren wir so, daß einem Sachverhalt (dem des Regnens) ein Prädikat (das Geglaubtwerden) zugeschrieben wird. Wenn wir jenen Satz durch die Formel $G(\hat{}R)$ (G für "Es wird geglaubt", $\hat{}R$ für "daß es regnet") ausdrücken, so wird in der Semantik wie folgt verfahren: die Indizes stehen für Welten, und

man belegt in einer Welt $^{\wedge}R$ mit der Menge derjenigen Welten, in denen R wahr wird (eine Eigenschaft drückt man ja in der Logik stets durch die Menge der Dinge aus, denen sie zukommt; einem Term, der für einen Sachverhalt d.h. einer Eigenschaft von Welten steht, muß man ergo eine Menge von Welten zuweisen), und G mit einer Menge von Weltenmengen. $G(^{\wedge}R)$ wird in einer Welt genau dann wahr, wenn die $^{\wedge}R$ zugeordnete Menge als Element in der G zugeordneten enthalten ist.

3. Die formalistische Deutung: man verzichtet auf jede philosophisch-metaphysische Interpretation der Indizes und - im Falle der modalen Semantik - der Relation zwischen ihnen, auch geht man nicht davon aus, daß die interpretierten Formeln über die Objekte des Individuenbereiches sprechen (diese werden quasi als "dummy-Objekte" behandelt; worauf sich die Formeln beziehen, interessiert nicht). Man betrachtet Interpretationen nicht mehr, so wie in der Prädikatenlogik, als Widerspiegelung der Wahrheitswertzuordnung der natürlichen Sprache, sondern nur als irgendeine Methode, um logischen Formeln Wahrheitswerte zuzuweisen; hierbei sollte durch einen Vollständigkeitssatz gesichert sein, daß jede bzgl. eines bestimmten Axiomensystems widerspruchsfreie Formelmenge ein Modell besitzt. Warum in einer Welt ein Satz "Es wird geglaubt, daß es regnet" wahr oder falsch ist, wird nicht untersucht, das überläßt man der Philosophie.
Die formalistische Deutung könnte man durch folgende Auffassung über die Sprache ergänzen: es ist nicht so, daß wir die Sätze, die einen bestimmten Weltzustand korrekt beschreiben, von diesem wie aus einem Buch ablesen (dank unserer Kenntnis der Bedeutung der Worte), sondern eher so, daß wir über ein Arsenal widerspruchsfreier Satzmengen verfügen, mit deren Hilfe wir uns in der Welt zurechtfinden. Es ist also durchaus legitim, sich auf Axiomensysteme, Ableitungen und Widerspruchsfreiheit zu konzentrieren und das Wie und Warum der Wahrheitszuordnung - zumindest in der Logik - zu vernachlässigen.

Es sei dem Leser überlassen, sich für eine der erwähnten Deutungen zu entscheiden oder eine eigene vorzunehmen, nachdem er den Text gelesen hat (wir neigen zur formalistischen Deutung).

Beweisverfahren für die Modallogik

Zwei Systeme der Modallogik

Wir führen zunächst die Sprache $\underline{P}$ der Modallogik ein. Das Alphabet von $\underline{P}$ ist die disjunkte Vereinigung der Menge $\{\neg, \rightarrow, \forall, \Box, (,)\}$ der Grundzeichen von $\underline{P}$ und der Zeichenmengen V, I und P_n, $n \in \mathbb{N}$, die jeweils abzählbar viele Elemente enthalten. Die Elemente von V heißen Variablen, die von I Individuenkonstanten oder einfach Konstanten und die der Mengen P_n Prädikatenkonstanten oder einfach Prädikate der Stellenzahl n. Wir verzichten darauf, die Variablen und Konstanten von $\underline{P}$ explizit anzugeben, und verwenden stets Metavariablen, um über Ausdrücke der Objektsprache zu sprechen: es stehen dabei $x, y, z, \ldots$ für Variable, $a, b, c, \ldots$ für Individuenkonstanten und $F, G, H, \ldots$ für Prädikatenkonstanten. Für Formeln der Sprache $\underline{P}$ verwenden wir Metavariablen $P, Q, R, \ldots$:

DEF. 1 (i) Sei F Prädikat der Stellenzahl n und seien $a_1, \ldots, a_n$ Konstanten: dann ist die Zeichenkette $F(a_1,\ldots,a_n)$ eine Formel (Primformel) von $\underline{P}$.

(ii) Seien P, Q Formeln von $\underline{P}$: dann sind auch $\neg P$, $(P \rightarrow Q)$ und $\Box P$ Formeln von $\underline{P}$.

(iii) Sei P Formel von $\underline{P}$, in der x nicht und a ein- oder mehrfach vorkommt: dann ist $\forall x P'$ Formel von $\underline{P}$, wobei P' aus P durch Ersetzen aller Vorkommen von a durch x entsteht.

(iv) Die Menge der Formeln von $\underline{P}$ ist die kleinste Menge, die die Bedingungen (i) - (iii) erfüllt.

Ab jetzt wollen wir bei Formeln die äußersten Klammern weglassen und folgende metasprachlichen Abkürzungen verwenden:

$P \vee Q$	für	$\neg P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$	für	$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
$P \wedge Q$	für	$\neg (P \rightarrow \neg Q)$	$\exists x P$	für	$\neg \forall x \neg P$
			$\Diamond P$	für	$\neg \Box \neg P$

Sei P eine Formel, in der x nicht vorkommt: dann steht $P[\,]$ für die Zeichenkette, die aus P durch Entfernung einer oder mehrerer Konstanten entsteht und $P[x]$, $P[a]$, $P[a,b]$ usw. für die Zeichenketten, die sich aus $P[\,]$ durch Einsetzen von x , a , a und b usw. in die Leerstellen ergeben.

Durch die Sprache $\underline{P}$ können wir Sätze ausdrücken, in denen Wendungen wie "Es ist notwendig, daß" oder "Es ist möglich, daß" vorkommen, was wir jeweils durch $\Box$ bzw. $\Diamond$ übersetzen.

DEF. 2 Eine 1-Interpretation von $\underline{P}$ ist ein Quadrupel $\langle \underline{U}, \underline{I}, \underline{R}, \underline{\mathfrak{F}} \rangle$ mit

(i) der nichtleeren Individuenmenge $\underline{U}$;

(ii) der nichtleeren Indexmenge $\underline{I}$, deren Elemente wir durch Metavariablen $\underline{i}$, $\underline{j}$, ... bezeichnen ;

(iii) der zweistelligen Relation $\underline{R} \subseteq \underline{I} \times \underline{I}$, wobei für alle $\underline{i}$ $\underline{R}(\underline{i},\underline{i})$ gilt d.h. $\underline{R}$ ist reflexiv ;

(iv) der Menge $\underline{\mathfrak{F}}_{n\in\mathbb{N}}$ $\underline{\mathfrak{F}} := \{ \underline{\mathfrak{F}}_{\underline{i}} \mid \underline{i} \in \underline{I} \}$, von Abbildungen, die auf $I \cup \bigcup P_n$ definiert sind.

Eine Menge $\underline{\mathfrak{F}}'$, $\underline{\mathfrak{F}}' := \{ \underline{\mathfrak{F}}_{\underline{i}}' \mid \underline{i} \in \underline{I} \}$, heißt a-Variante von $\underline{\mathfrak{F}}$ genau dann, wenn für alle $\underline{i} \in \underline{I}$ sich $\underline{\mathfrak{F}}_{\underline{i}}$ und $\underline{\mathfrak{F}}_{\underline{i}}'$ höchstens in denjenigen Werten unterscheiden, die sie der Konstanten a zuordnen.

Es gilt nun für alle Abbildungen $\underline{\mathfrak{F}}_{\underline{i}}$:

(i) Für alle Konstanten a und alle $\underline{j} \in \underline{I}$ ist $\underline{\mathfrak{F}}_{\underline{i}}(a) \in \underline{U}$ sowie $\underline{\mathfrak{F}}_{\underline{i}}(a) = \underline{\mathfrak{F}}_{\underline{j}}(a)$.

(ii) Für alle n-stelligen Prädikate F ist $\underline{\mathfrak{F}}_{\underline{i}}(F) \subseteq \underline{U}^n$.

Wir ordnen nun den Formeln durch Abbildungen $\underline{\mathfrak{F}}_{\underline{i}}$, $\underline{i} \in \underline{I}$, Wahrheitswerte wahr bzw. falsch zu, wobei wir die einzelnen Funktionswerte in der folgenden Weise festlegen:

(i) Für alle n-stelligen Prädikate F und Konstanten $a_1, \ldots, a_n$ gilt:

$$\underline{\mathfrak{F}}_{\underline{i}}(F(a_1,\ldots,a_n)) = \text{wahr} \Leftrightarrow (\underline{\mathfrak{F}}_{\underline{i}}(a_1),\ldots,\underline{\mathfrak{F}}_{\underline{i}}(a_n)) \in \underline{\mathfrak{F}}_{\underline{i}}(F)$$

(ii) Für alle Formeln P , Q gilt:

$\mathfrak{I}_i(\neg P) = \underline{\text{wahr}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{I}_i(P) = \underline{\text{falsch}}$.

$\mathfrak{I}_i(P \to Q) = \underline{\text{wahr}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{I}_i(P) = \underline{\text{falsch}}$ oder (inklusives "oder") $\mathfrak{I}_i(Q) = \underline{\text{wahr}}$.

(iii) Für alle Formeln P und Variablen x gilt:

$\mathfrak{I}_i(\forall x\, P[x]) = \underline{\text{wahr}} \quad \Leftrightarrow$ für alle a-Varianten $\mathfrak{I}'$ von $\mathfrak{I}$, wobei a nicht in P vorkommt, gilt: $\mathfrak{I}'_i(P[a]) = \underline{\text{wahr}}$.

(iv) Für alle Formeln P gilt:

$\mathfrak{I}_i(\Box P) = \underline{\text{wahr}} \quad \Leftrightarrow$ für alle $j \in I$ gilt: falls $R(i,j)$, so $\mathfrak{I}_j(P) = \underline{\text{wahr}}$.

DEF. 3 Ein Quadrupel $\langle U, I, R, \mathfrak{I} \rangle$ heißt genau dann 2-Interpretation, wenn alle Bedingungen von DEF. 2 erfüllt sind und außerdem für alle i, j $R(i,j)$ gilt.

DEF. 4 Eine Formel P heißt gültig in einer Interpretation $\langle U, I, R, \mathfrak{I} \rangle$ genau dann, wenn für alle $i \in I$ gilt: $\mathfrak{I}_i(P) = \underline{\text{wahr}}$.

P heißt k-gültig, $k \in \{1, 2\}$, genau dann, wenn P in jeder k-Interpretation gültig ist.

Wir kommen nun zu zwei Axiomensystemen A_1 und A_2, in denen sich verschiedene Notwendigkeitsbegriffe widerspiegeln. A_1 wird in der Literatur auch oft als T, A_2 als S5 bezeichnet.

Axiome von A_1 sind alle Formeln der folgenden Gestalt:

A1: $P \to (Q \to P)$

A2: $(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$

A3: $(\neg P \to \neg Q) \to (Q \to P)$

A4: $\forall x\, P[x] \to P[a]$

A5: $\Box P \to P$

A6: $\Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q)$

A7: $\forall x\, \Box P[x] \to \Box \forall x\, P[x]$

Es gibt drei Ableitungsregeln (Formeln der rechts vom $\vdash$ beschriebenen Form entstehen aus Formeln der links beschriebenen Form):

R1: $P\ ,\ P \rightarrow Q \vdash Q$

R2: $P \rightarrow Q[a] \vdash P \rightarrow \bigwedge x\ Q[x]$ wobei a nicht in P vorkommt

R3: $P \vdash \Box P$

Das System A_2 entsteht aus A_1 durch Hinzunahme des Axiomenschemas A8: $\Diamond P \rightarrow \Box \Diamond P$.

DEF. 5 Eine Formel P heißt Theorem des Systems A_k , $k \in \{1, 2\}$, genau dann, wenn eine Folge $P_1, \ldots, P_n$, $P_n = P$, von Formeln existiert, wobei jedes P_i , $i \leq n$, entweder ein Axiom von A_k ist oder aus Formeln P_j bzw. P_j, P_l , $j,l < i$, durch einmaliges Anwenden einer Ableitungsregel entsteht.

SATZ 1 Eine Formel ist genau dann ein Theorem des Systems A_k , $k \in \{1, 2\}$, wenn sie k-gültig ist.

Zum Beweis sei auf Kutschera (1976) (T2.4-4 , T2.6-1 , T2.6-2) verwiesen sowie auf Hughes & Cresswell (1968) (II,8 , II,9).

Übersetzungen und korrespondierende Interpretationen

Wir führen zunächst die Sprache $\underline{P}'$ der Prädikatenlogik mit Gleichheit ein. Das Alphabet ist die disjunkte Vereinigung der Mengen $\{\neg, \rightarrow, \bigwedge, =, (,)\}$, V , I , P_n und F_n , $n \in \mathbb{N}$, wobei die F_n jeweils abzählbar viele Funktionskonstanten der Stellenzahl n enthalten. Als Metavariablen dienen i , j , k , x , y , z ,... für Variable, a , b , c , I , J , K , ... für Konstanten, F', G', H',... für Prädikate, f , g , h , ... sowie r für Funktionskonstanten, P', Q', R',... für Formeln und s , t , ... für Terme:

DEF. 6 (i) Jede Individuenkonstante ist ein Term von $\underline{P}'$.

(ii) Sei f Funktionskonstante der Stellenzahl n und seien $t_1, \ldots, t_n$ Terme der Sprache $\underline{P}'$: dann ist $f(t_1,\ldots,t_n)$ Term von $\underline{P}'$.

(iii) Die Menge der Terme von $\underline{P}'$ ist die kleinste Menge, die die Bedingungen (i) , (ii) erfüllt.

Primformeln von $\underline{P}'$ sind alle Formeln der Form $F'(t_1,\ldots,t_n)$ und $s = t$; Formeln mit $\neg$, $\rightarrow$, $\forall$ ergeben sich analog zu DEF. 1 .

Wir wollen voraussetzen, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung von P_n in P_{n+1} existiert, und das Bild eines Prädikats F unter der passenden Bijektion stets mit F' bezeichnen, das Bild von G mit G' usw..

DEF. 7 Sei P Formel von $\underline{P}$. Eine Formel von $\underline{P}'$ heißt Übersetzung von P , wenn sie wie folgt aus P entsteht:

(i) Jedes Vorkommen eines Prädikats F ersetzen wir durch F', jedes Vorkommen von G durch G' usw.; die Argumenttupel vergrößern wir vorn um eine Stelle, in die wir die Variable i einsetzen. Vor die Zeichenkette setzen wir $\forall i$.

(ii) Man geht von links durch die Formel, bis man auf eine Zeichenkette $\Box(\ldots)$ stößt, wobei innerhalb der Klammer in jedem Argumenttupel an erster Stelle der gleiche Term t steht. Sei j eine Variable, die nirgends in der Formel vorkommt, und r eine zweistellige Funktionskonstante: man ersetzt dann $\Box$ durch $\forall j$ und in der Klammer t überall durch r(t,j) .

(iii) Schritt (ii) wiederholt man, bis alle $\Box$ verschwunden sind, wobei man jedesmal das gleiche r benutzt.

Beispiel: Umformung der Formel $\Box F(a) \rightarrow \Box\Box G(b)$

1. Schritt: $\forall i\ (\Box F'(i,a) \rightarrow \Box\Box G'(i,b))$
2. Schritt: $\forall i\ (\forall j\ F'(r(i,j),a) \rightarrow \Box\Box G'(i,b))$
3. Schritt: $\forall i\ (\forall j\ F'(r(i,j),a) \rightarrow \forall k \Box G'(r(i,k),b))$
4. Schritt: $\forall i\ (\forall j\ F'(r(i,j),a) \rightarrow \forall k \forall l\ G'(r(r(i,k),l),b))$

DEF. 8 Eine Interpretation von $\underline{P}'$ ist ein Paar $\langle \underline{U}, \Psi \rangle$ mit nichtleerer Individuenmenge $\underline{U}$ und Belegung Ψ der Prädikate, Individuen- und Funktionskonstanten, wobei für alle a $\Psi(a) \in \underline{U}$, für alle n-stelligen F' $\Psi(F') \subseteq \underline{U}^n$, für alle n-stelligen f $\Psi(f) : \underline{U}^n \rightarrow \underline{U}$. Die Abbildung $\underline{\Psi}$, die auf der Menge der Terme und Formeln definiert ist, ergibt sich wie folgt:

(i) für alle Konstanten a $\underline{\Psi}(a) = \Psi(a)$

(ii) für alle n-stelligen F', f und Terme $t_1, \ldots, t_n$

$\underline{\Psi}(f(t_1,\ldots,t_n)) = \Psi(f)\,(\underline{\Psi}(t_1),\ldots,\underline{\Psi}(t_n))$
$\underline{\Psi}(F'(t_1,\ldots,t_n)) = \underline{\text{wahr}} \Leftrightarrow (\underline{\Psi}(t_1),\ldots,\underline{\Psi}(t_n)) \in \Psi(F')$

(iii) für alle Formeln P , Q und Terme s , t

$\underline{\Psi}(\neg P) = \underline{\text{wahr}} \Leftrightarrow \underline{\Psi}(P) = \underline{\text{falsch}}$
$\underline{\Psi}(P \to Q) = \underline{\text{wahr}} \Leftrightarrow \underline{\Psi}(P) = \underline{\text{falsch}}$ oder $\underline{\Psi}(Q) = \underline{\text{wahr}}$
$\underline{\Psi}(s = t) = \underline{\text{wahr}} \Leftrightarrow \underline{\Psi}(s) = \underline{\Psi}(t)$

(iv) für alle Formeln P und Variablen x

$\underline{\Psi}(\forall x\, P[x]) = \underline{\text{wahr}}$ $\Leftrightarrow$ für alle a-Varianten Ψ' von Ψ , wobei a in P nicht vorkommt, gilt: $\underline{\Psi}'(P[a]) = \underline{\text{wahr}}$

Dabei sei eine a-Variante von Ψ eine Belegung, die sich von Ψ höchstens in dem Werte für a unterscheidet.

Bei den nächsten Definitionen und Sätzen mögen die Metavariablen $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$,... Elemente von $\underline{U}$ bezeichnen und $\underline{r}$ die Funktion, die durch $\underline{\Psi}$ der Funktionskonstanten r zugewiesen wird.

DEF. 9 Interpretationen $\langle \underline{U} , \underline{I} , \underline{R} , \underline{\mathfrak{F}} \rangle$, $\langle \underline{U} \times \underline{I} , \underline{\Psi} \rangle$ heißen genau dann korrespondierend, wenn gilt:

(i) Für alle a und $\underline{i}$ gibt es $\underline{j}$ mit $\underline{\Psi}(a) = (\underline{\mathfrak{F}}_{\underline{i}}(a),\underline{j})$

(ii) Für alle $\underline{i}$, $\underline{i}_1$, ... , $\underline{i}_n$, $\underline{a}$, $\underline{a}_1$, ... , $\underline{a}_n$ und n- bzw. n+1-stellige F , F' gilt: $(\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n) \in \underline{\mathfrak{F}}_{\underline{i}}(F) \Leftrightarrow ((\underline{a},\underline{i}),(\underline{a}_1,\underline{i}_1),\ldots,(\underline{a}_n,\underline{i}_n)) \in \underline{\Psi}(F')$

(iii) Für alle $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{i}$, $\underline{j}$ gilt: $\underline{r}((\underline{a},\underline{i}),(\underline{b},\underline{j})) = (\underline{b},\underline{j})$ falls $\underline{R}(\underline{i},\underline{j})$, andernfalls $\underline{r}((\underline{a},\underline{i}),(\underline{b},\underline{j})) = (\underline{a},\underline{i})$

Aus der Definition ergibt sich unmittelbar, wie man zu einer gegebenen Interpretation von $\underline{P}$ eine korrespondierende für $\underline{P}'$ definieren kann. Sei nun $\langle \underline{U} , \underline{I} , \underline{R} , \underline{\mathfrak{F}} \rangle$ k-Interpretation, k = 1,2 :

SATZ 2 Seien $\langle \underline{U} , \underline{I} , \underline{R} , \underline{\mathfrak{F}} \rangle$, $\langle \underline{U} \times \underline{I} , \underline{\Psi} \rangle$ korrespondierende Interpretationen. Dann gilt für alle $\underline{i}$, $\underline{a}$, P mit Übersetzung $\forall i\, P'[i]$, wobei in $P'[\,]$ I nicht vorkommt, und I-Varianten Ψ' von Ψ : falls $\underline{\Psi}'(I) = (\underline{a},\underline{i})$, so $\underline{\mathfrak{F}}_{\underline{i}}(P) = \underline{\text{wahr}} \Leftrightarrow \underline{\Psi}'(P'[I]) = \underline{\text{wahr}}$

Beweis: (durch Induktion über die Länge von P)

(i) $P := F(a_1,\ldots,a_n)$, $P'[I] := F'(I,a_1,\ldots,a_n)$. Es gilt

bei $\Psi'(I) = (\underline{a},\underline{i})$: $\underline{\Psi}'(F'(I,a_1,\ldots,a_n)) = \underline{\text{wahr}} \Leftrightarrow$
$(\underline{\Psi}'(I),\underline{\Psi}'(a_1),\ldots,\underline{\Psi}'(a_n)) \in \Psi'(F')$ (nach DEF. 8(ii)) $\Leftrightarrow$
$(\Psi'(I),\Psi'(a_1),\ldots,\Psi'(a_n)) \in \Psi'(F')$ (nach DEF. 8(i)) $\Leftrightarrow$
$((\underline{a},\underline{i}),\Psi(a_1),\ldots,\Psi(a_n)) \in \Psi(F')$ (da Ψ' I-Variante von Ψ ist, aber I in $F'(\ ,a_1,\ldots,a_n)$ nicht vorkommt)
$\Leftrightarrow ((\underline{a},\underline{i}),(\underline{\Psi}_{\underline{i}}(a_1),\underline{i}_1),\ldots,(\underline{\Psi}_{\underline{i}}(a_n),\underline{i}_n)) \in \underline{\Psi}(F')$ (nach DEF. 9(i)) $\Leftrightarrow (\underline{\Psi}_{\underline{i}}(a_1),\ldots,\underline{\Psi}_{\underline{i}}(a_n)) \in \underline{\Psi}_{\underline{i}}(F)$ (nach DEF. 9(ii))
$\Leftrightarrow \underline{\Psi}_{\underline{i}}(F(a_1,\ldots,a_n)) = \underline{\text{wahr}}$ (nach DEF. 2)

(ii) Zu zeigen: gilt der Satz für Formeln Q , R mit Übersetzungen $\forall i\ Q'[i]$, $\forall i\ R'[i]$, dann auch für $\neg Q$, $Q \to R$ mit den sich daraus ergebenden Übersetzungen $\forall i \neg Q'[i]$ und $\forall i\ (Q'[i] \to R'[i])$ d.h. falls $\Psi'(I) = (\underline{a},\underline{i})$, so gelten $\underline{\Psi}_{\underline{i}}(\neg Q) = \underline{\text{wahr}} \Leftrightarrow \underline{\Psi}'(\neg Q'[I]) = \underline{\text{wahr}}$ und $\underline{\Psi}_{\underline{i}}(Q \to R) = \underline{\text{wahr}} \Leftrightarrow \underline{\Psi}'(Q'[I] \to R'[I]) = \underline{\text{wahr}}$. Diese Äquivalenzen ergeben sich nun leicht aus der Induktionsvoraussetzung, daß nämlich für $\Psi'(I) = (\underline{a},\underline{i})$ $\underline{\Psi}_{\underline{i}}(Q) = \underline{\text{wahr}} \Leftrightarrow \underline{\Psi}'(Q'[I]) = \underline{\text{wahr}}$ und $\underline{\Psi}_{\underline{i}}(R) = \underline{\text{wahr}} \Leftrightarrow \underline{\Psi}'(R'[I]) = \underline{\text{wahr}}$ gelten.

(iii) Es möge der Satz für $Q[a]$ mit Übersetzung $\forall i\ Q'[i,a]$ gelten (a komme in $Q[\ ],Q'[i,\ ]$ nicht vor), und sei $P := \forall x\ Q[x]$ mit Übersetzung $\forall i \forall x\ Q'[i,x]$. Sei nun $\Psi'(I) = (\underline{a},\underline{i})$: wir zeigen dann $\underline{\Psi}_{\underline{i}}(\forall x\ Q[x]) = \underline{\text{falsch}} \Leftrightarrow \underline{\Psi}'(\forall x\ Q'[I,x]) = \underline{\text{falsch}}$ d.h. es gibt eine a-Variante $\underline{\Phi}'$ mit $\underline{\Phi}'_{\underline{i}}(Q[a]) = \underline{\text{falsch}} \Leftrightarrow$ es gibt eine a-Variante Ψ'_a von Ψ' mit $\underline{\Psi}'_a(Q'[I,a]) = \underline{\text{falsch}}$:

"$\Rightarrow$" Wenn solch eine a-Variante $\underline{\Phi}'$ existiert, so betrachte man die Interpretation $\langle \underline{U}, \underline{I}, \underline{R}, \underline{\Phi}' \rangle$. Zu Ψ bildet man nun eine a-Variante Ψ_a mit $\Psi_a(a) = (\underline{\Phi}'_{\underline{i}}(a),\underline{j})$, $\underline{j}$ beliebig. Dann sind $\langle \underline{U} \times \underline{I}, \Psi_a \rangle$, $\langle \underline{U}, \underline{I}, \underline{R}, \underline{\Phi}' \rangle$ korrespondierende Interpretationen. Nach Induktionsvoraussetzung können wir den Satz auf diese beiden Interpretationen, die Formel $Q[a]$ und die I-Variante Ψ'_a von Ψ_a mit $\Psi'_a(I) = (\underline{a},\underline{i})$ anwenden: aus $\underline{\Phi}'_{\underline{i}}(Q[a]) = \underline{\text{falsch}}$ folgt dann $\underline{\Psi}'_a(Q'[I,a]) = \underline{\text{falsch}}$. Ψ'_a ist dann aber auch die gesuchte a-Variante von Ψ' .

"$\Leftarrow$" Es möge solch eine a-Variante Ψ'_a existieren. Sei Ψ_a a-Variante von Ψ mit $\Psi_a(a) = \Psi'_a(a)$; Ψ'_a ist dann I-Variante von Ψ_a . Sei $\underline{\Phi}'$ a-Variante von $\underline{\Phi}$ mit $\underline{\Phi}'(a) = \underline{b}$, falls $\Psi_a(a) = (\underline{b},\underline{j})$. $\langle \underline{U}, \underline{I}, \underline{R}, \underline{\Phi}' \rangle$,

$\langle \underline{U} \times \underline{I}\,,\ \underline{\Psi}_a \rangle$ sind dann korrespondierende Interpretationen. Wir wenden auf diese, $Q[a]$ und die I-Variante $\underline{\Psi}'_a$ (da sie a-Variante von $\underline{\Psi}'$ ist, gilt ja $\underline{\Psi}'_a(I) = (\underline{a},\underline{i})$) unseren Satz an, wonach $\underline{\Psi}'_a(Q'[i,a]) = \underline{falsch}$ $\underline{\Xi}'_i(Q[a]) = \underline{falsch}$ impliziert. $\underline{\Xi}'$ ist also die gesuchte a-Variante von $\underline{\Xi}$.

(iv) Es möge der Satz für Q mit Übersetzung $\forall i\ Q'[i]$ gelten, und sei $P := \Box Q$ mit Übersetzung $\forall i \forall j\ Q'[r(i,j)]$. Sei $\underline{\Psi}'(I) = (\underline{a},\underline{i})$: wir zeigen dann $\underline{\Xi}_i(\Box Q) = \underline{falsch} \iff \underline{\Psi}'(\forall j\ Q'[r(I,j)]) = \underline{falsch}$ d.h. es gibt ein $\underline{j}$ mit $\underline{R}(\underline{i},\underline{j})$ und $\underline{\Xi}_j(Q) = \underline{falsch} \iff$ es gibt eine J-Variante $\underline{\Psi}'_j$ von $\underline{\Psi}'$ mit $\underline{\Psi}'_j(Q'[r(I,J)]) = \underline{falsch}$:

"$\Rightarrow$" Wenn solch ein Index $\underline{j}$ existiert, wenden wir unseren Satz auf die gegebenen Interpretationen, Q und die J-Variante $\underline{\Psi}_J$ von $\underline{\Psi}$ mit $\underline{\Psi}_J(J) = (\underline{b},\underline{j})$, $\underline{b}$ beliebig, an (J möge in $Q'[\,]$ nicht vorkommen und von I verschieden sein) und erhalten wegen $\underline{\Xi}_j(Q) = \underline{falsch}$ $\underline{\Psi}_J(Q'[J]) = \underline{falsch}$. Sei $\underline{\Psi}'_J$ I-Variante von $\underline{\Psi}_J$ mit $\underline{\Psi}'_J(I) = (\underline{a},\underline{i})$: da I in $Q'[J]$ nicht vorkommt, gilt nach dem Koinzidenztheorem $\underline{\Psi}_J(Q'[J]) = \underline{\Psi}'_J(Q'[J])$. Wegen $\underline{R}(\underline{i},\underline{j})$ ist $\underline{r}((\underline{a},\underline{i}),(\underline{b},\underline{j})) = (\underline{b},\underline{j})$ (DEF. 9(iii)), also $\underline{\Psi}'_J(r(I,J)) = \underline{\Psi}'_J(J)$ (man beachte: $\underline{\Psi}'_J(r) = \underline{\Psi}(r) = \underline{r}$, $\underline{\Psi}'_J(I) = \underline{\Psi}'_J(I) = (\underline{a},\underline{i})$, $\underline{\Psi}'_J(J) = \underline{\Psi}'_J(J) = \underline{\Psi}_J(J) = (\underline{b},\underline{j})$) und $\underline{\Psi}'_J(Q'[r(I,J)]) = \underline{\Psi}'_J(Q'[J]) = \underline{falsch}$. $\underline{\Psi}'_J$ ist dann aber auch die gesuchte J-Variante von $\underline{\Psi}'$.

"$\Leftarrow$" Es möge solch eine J-Variante mit $\underline{\Psi}'_J(J) = (\underline{b},\underline{j})$ existieren. Dann müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

(i) $\underline{r}((\underline{a},\underline{i}),(\underline{b},\underline{j})) = (\underline{a},\underline{i})$: dann gilt $\underline{\Psi}'_J(Q'[r(I,J)]) = \underline{\Psi}'_J(Q'[I]) = \underline{falsch}$ und nach Koinzidenztheorem $\underline{\Psi}'(Q'[I]) = \underline{falsch}$. Wir wenden den Satz auf die gegebenen Interpretationen, Q und die I-Variante $\underline{\Psi}'$ an und erhalten $\underline{\Xi}_i(Q) = \underline{falsch}$. i ist also der gesuchte Index, denn er gilt ja $\underline{R}(\underline{i},\underline{i})$.

(ii) $\underline{r}((\underline{a},\underline{i}),(\underline{b},\underline{j})) = (\underline{b},\underline{j})$, $(\underline{a},\underline{i}) \neq (\underline{b},\underline{j})$ (bei Gleichheit sei es in (i) behandelt): dann gilt $\underline{\Psi}'_J(Q'[r(I,J)]) = \underline{\Psi}'_J(Q'[J]) = \underline{falsch}$ und nach Koinzidenztheorem $\underline{\Psi}_J(Q'[J]) = \underline{falsch}$, wobei $\underline{\Psi}_J$ J-Variante von $\underline{\Psi}$ mit $\underline{\Psi}_J(J) = \underline{\Psi}'_J(J) = (\underline{b},\underline{j})$. Wir wenden unseren Satz auf die beiden Interpretationen, Q und $\underline{\Psi}_J$ an und erhalten $\underline{\Xi}_j(Q) = \underline{falsch}$. j ist der gesuchte Index, denn es gilt $\underline{R}(\underline{i},\underline{j})$, da sonst $\underline{r}((\underline{a},\underline{i}),(\underline{b},\underline{j})) = (\underline{a},\underline{i})$ sein müßte (DEF. 9(iii)).

SATZ 3 Seien $\langle \underline{U}, \underline{I}, \underline{R}, \underline{\Phi} \rangle$, $\langle \underline{U} \times \underline{I}, \underline{\Psi} \rangle$ korrespondierende Interpretationen. Dann gilt für alle Formeln P mit Übersetzung $\forall i\ P'[i]$: für alle $\underline{i}$ $\underline{\Phi}_{\underline{i}}(P) = \underline{\text{wahr}}$ genau dann, wenn $\underline{\Psi}(\forall i\ P'[i]) = \underline{\text{wahr}}$.

Beweis: Wir zeigen: es gibt $\underline{i}$ mit $\underline{\Phi}_{\underline{i}}(P) = \underline{\text{falsch}}$ genau dann, wenn $\underline{\Psi}(\forall i\ P'[i]) = \underline{\text{falsch}}$, also wenn es eine I-Variante $\underline{\Psi}'$ mit $\underline{\Psi}'(P'[I]) = \underline{\text{falsch}}$ gibt.

"$\Rightarrow$" Man wählt eine I-Variante mit $\underline{\Psi}'(I) = (\underline{a}, \underline{i})$, $\underline{a}$ beliebig, und wendet SATZ 2 an.

"$\Leftarrow$" Sei $\underline{\Psi}'(I) = (\underline{a}, \underline{i})$. Dann folgt aus SATZ 2 , daß in diesem Fall $\underline{\Phi}_{\underline{i}}(P) = \underline{\text{falsch}}$.

Überblick über den Beweisalgorithmus

DEF. 10 Eine Formel P' der Sprache $\underline{P}'$ heißt allgemeingültig genau dann, wenn für jede Interpretation $\langle \underline{U}, \underline{\Psi} \rangle$ gilt: $\underline{\Psi}(P') = \underline{\text{wahr}}$.

Sei im Folgenden $P_1' := \forall i\ r(i,i) = i$, $P_2' := \forall i \forall j\ r(i,j) = j$.

SATZ 4 Sei P Formel von $\underline{P}$ mit Übersetzung $\forall k\ P'[k]$:

(i) Wenn $P_1' \rightarrow \forall k\ P'[k]$ allgemeingültig ist, so ist P 1-gültig.

(ii) Wenn $P_2' \rightarrow \forall k\ P'[k]$ allgemeingültig ist, so ist P 2-gültig.

Beweis: Zu (i): damit P 1-gültig ist, muß es in jeder 1-Interpretation wahr werden. Zu jeder 1-Interpretation $\langle \underline{U}, \underline{I}, \underline{R}, \underline{\Phi} \rangle$ definieren wir eine korrespondierende Interpretation $\langle \underline{U} \times \underline{I}, \underline{\Psi} \rangle$: dann ist $\underline{\Psi}(P_1') = \underline{\text{wahr}}$ d.h. für alle I-Varianten $\underline{\Psi}'$ ist $\underline{\Psi}'(r(I,I) = I) = \underline{\text{wahr}}$, denn: sei $\underline{\Psi}'(I) = \underline{\Psi}'(I) = (\underline{a}, \underline{i})$, $\underline{\Psi}'(r) = \underline{\Psi}(r) = \underline{r}$. Dann ist $\underline{r}((\underline{a}, \underline{i}), (\underline{a}, \underline{i})) = (\underline{a}, \underline{i})$ wegen $\underline{R}(\underline{i}, \underline{i})$ (DEF. 9(iii)), also $\underline{\Psi}'(r(I,I)) = \underline{\Psi}'(I)$.

Wenn $P_1' \rightarrow \forall k\ P'[k]$ allgemeingültig ist, so ist auch $\underline{\Psi}(P_1' \rightarrow \forall k\ P'[k]) = \underline{\text{wahr}}$, also $\underline{\Psi}(\forall k\ P'[k]) = \underline{\text{wahr}}$. Nach SATZ 3 gilt dann für alle $\underline{i}$ $\underline{\Phi}_{\underline{i}}(P) = \underline{\text{wahr}}$ d.h. P ist gültig in $\langle \underline{U}, \underline{I}, \underline{R}, \underline{\Phi} \rangle$.

Teil (ii) zeigen wir analog, indem wir zu jeder 2-Interpretation $\langle \underline{U}, \underline{I}, \underline{R}, \underline{\Psi} \rangle$ eine korrespondierende Interpretation $\langle \underline{U} \times \underline{I}, \underline{\Psi} \rangle$ definieren, wobei $\underline{\Psi}(P'_2) = \underline{\text{wahr}}$ d.h. für alle J-Varianten Ψ'' jeder I-Varianten Ψ' von Ψ gilt $\underline{\Psi}''(r(I,J) = J) = \underline{\text{wahr}}$, denn: sei $\underline{\Psi}''(1) = \Psi''(I) = (\underline{a},\underline{i})$, $\underline{\Psi}''(J) = \Psi''(J) = (\underline{b},\underline{j})$, $\underline{\Psi}''(r) = \Psi'(r) = \underline{\Psi}(r) = \underline{r}$. Dann ist $\underline{r}((\underline{a},\underline{i}),(\underline{b},\underline{j})) = (\underline{b},\underline{j})$ wegen $\underline{R}(\underline{i},\underline{j})$ (DEF. 9(iii)), also $\underline{\Psi}''(r(I,J)) = \underline{\Psi}''(J)$.
Aus der Allgemeingültigkeit von $P'_2 \rightarrow \forall k\, P'[k]$ folgt dann $\underline{\Psi}(P'_2 \rightarrow \forall k\, P'[k]) = \underline{\text{wahr}}$, also $\underline{\Psi}(\forall k\, P'[k]) = \underline{\text{wahr}}$. Nach SATZ 3 ist P dann gültig in $\langle \underline{U}, \underline{I}, \underline{R}, \underline{\Psi} \rangle$.

SATZ 5 Sei P Formel von $\underline{P}$ mit Übersetzung $\forall k\, P'[k]$:

(i) Wenn P 1-gültig ist, so ist $P'_1 \rightarrow \forall k\, P'[k]$ allgemeingültig.

(ii) Wenn P 2-gültig ist, so ist $P'_2 \rightarrow \forall k\, P'[k]$ allgemeingültig.

Beweis: Teil (i) wird gezeigt, indem man nachweist: ist P Axiom des Axiomensystems A_1, so ist $P'_1 \rightarrow \forall k\, P'[k]$ allgemeingültig (wäre z.B. P von der Form $\Box Q \rightarrow Q$, so müßte man $\forall i\, r(i,i) = i \rightarrow \forall k(\forall j\, Q'[r(k,j)] \rightarrow Q'[k])$ als allgemeingültig nachweisen), und ergibt sich P aus Q bzw. Q, R durch eine Ableitungsregel, so folgt aus der Allgemeingültigkeit von $P'_1 \rightarrow \forall k\, Q'[k]$ (und der von $P'_1 \rightarrow \forall k\, R'[k]$) die von $P'_1 \rightarrow \forall k\, P'[k]$. Die Einzelheiten des Beweises wollen wir dem Leser überlassen.
Teil (ii) ergibt sich analog zu Teil (i).

Sei nun eine Formel P k-gültig ($k \in \{1,2\}$). Wir bilden dann die Formel $P'_k \rightarrow \forall 1\, P'[1]$ und wenden darauf eines der bekannten Beweisverfahren der Prädikatenlogik mit Gleichheit an, z.B. die Paramodulation (vgl. Chang & Lee (1973), 8.3): aus SATZ 5 folgt dann, daß jener Algorithmus anhält, da die Paramodulation bei jeder allgemeingültigen Formel stoppen wird. Aus SATZ 4 ergibt sich, daß, falls die Paramodulation anhält, P k-gültig ist, da jener Algorithmus nur bei allgemeingültigen Formeln stoppt. Wir haben somit eine Prozedur gewonnen, die genau die k-gültigen Formeln erkennt (der Nachteil des Verfahrens ist bekanntlich, daß man nie weiß, ob der Algorithmus jemals stoppen wird, wenn man ihn auf eine Formel anwendet).

Ein System der intensionalen Logik

Die Sprache $\underline{S}$

Die Menge der Typen der Sprache $\underline{S}$ ist die kleinste Menge, die die Zeichen s , i , p enthält sowie für alle $t_1, \ldots, t_n \in \{i, p\}$ die Zeichenketten $s(t_1,\ldots,t_n)$, $i(t_1,\ldots,t_n)$ für $n \geq 1$ (die $t_1,\ldots,t_n$ seien Metavariablen, die Typen bezeichnen).

Das Alphabet von $\underline{S}$ ist die disjunkte Vereinigung der Menge $\{\neg, \rightarrow, =, \forall, \hat{}, (,), \Box\}$ der Grundzeichen von $\underline{S}$ und der Zeichenmengen V und K_t (t Typ verschieden von s und i), die jeweils abzählbar viele Elemente enthalten. Die Elemente von V heißen Variablen vom Typ i , die einer Menge K_t Konstanten des Typs t . Zur Bezeichnung wollen wir wieder Metavariablen nehmen: x , y , z ,... stehen für Variablen, a , b , c ,... für Konstanten des Typs i , A , B , C ,... für Konstanten des Typs $s(\ldots)$, F , G , H ,... für Konstanten vom Typ $s(i)$, $s(i,i)$, ... , und f , g , h ,... für Konstanten vom Typ $i(\ldots)$.

Die Terme von $\underline{S}$, die wir durch Metavariablen S , T , T_1 , ... bezeichnen, seien wie folgt definiert:

DEF. 11 (i) Konstanten und Variablen vom Typ i sind Terme vom Typ i .

(ii) Sei A Konstante vom Typ $s(t_1,\ldots,t_n)$, f Konstante vom Typ $i(t_1,\ldots,t_n)$, und seien $T_1, \ldots, T_n$ Terme vom Typ $t_1, \ldots, t_n$. Dann ist $A(T_1,\ldots,T_n)$ Term vom Typ s , $f(T_1,\ldots,T_n)$ Term vom Typ i .

(iii) Sei T Term vom Typ s und x Variable. Dann ist $\forall x\, T$ Term des Typs s .

(iv) Sei T Term vom Typ s . Dann ist $\hat{}T$ Term vom Typ p .

(v) Seien S , T Terme vom Typ s . Dann sind $\neg S$, $(S \rightarrow T)$, $\Box S$ Terme vom Typ s .

(vi) Seien S , T Terme vom Typ i . Dann ist $S = T$ Term vom Typ s .

(vii) Die Menge der Terme von $\underline{S}$ ist die kleinste Menge, die die Bedingungen (i) - (vi) erfüllt.

Die äußeren Klammern wollen wir ab jetzt stets weglassen sowie Terme mit $\vee$, $\wedge$, $\leftrightarrow$, $\exists$ in der bekannten Weise als metasprachliche Abkürzungen einführen.

Ein Vorkommen einer Variablen x in einem Term T heißt gebunden in T genau dann, wenn T oder ein Teilterm von T die Form $\forall x T'$ besitzt und sich das Vorkommen in T' befindet. Ein nichtgebundenes Vorkommen von x in T heißt frei in T .

Terme vom Typ s wollen wir Formeln nennen und mit Metavariablen P , Q , R ,... bezeichnen. Formeln, in denen keine Variable frei vorkommt, mögen Sätze heißen.

Sei T Term: dann bezeichnet $T[]$ eine Zeichenkette, die aus T durch Entfernen von Konstanten des Typs i entsteht, und $T[T_1]$, $T[T_1,T_2]$,... Terme, die man durch Einsetzen von Termen T_1 , T_2 , ... des Typs i in die Leerstellen erhält (die Bezeichnungen $T[T_1,T_2]$ usw. sind natürlich nicht eineindeutig, da man T_1 und T_2 auf verschiedene Weisen in die Leerstellen plazieren kann). Dabei soll ein freies Vorkommen einer Variablen in T_1 , T_2 , ... nicht nach dem Einsetzen durch einen Quantor in $T[]$ gebunden werden und außerdem bei Termen $\forall x P[x]$ x in $P[]$ nicht frei vorkommen.
Wir wollen den Fall zulassen, daß man zur Bildung von $T[]$ keine Konstante entfernt, also auch keine Leerstellen entstehen (dann bezeichnen T , $T[T_1]$, $T[T_1,T_2]$, ... alle denselben Term).

Sätze der natürlichen Sprache, in denen Eigenschaften von und Beziehungen zwischen Objekten ausgedrückt werden, lassen sich durch Formeln der Prädikatenlogik formalisieren. Durch Formeln von $\underline{S}$ ist es nun möglich, Sätze wiederzugeben, die Eigenschaften von und Beziehungen zwischen Sachverhalten und/oder Objekten beschreiben.

Beispiel: "Alfred glaubt, daß Bruno gesund ist" ⇝ B(a,ˆG(b))
"Wenn Bruno verletzt wäre, so würde Alfred ihm helfen"
⇝ W(ˆV(b),ˆH(a,b))
"Weil Bruno nicht verletzt ist, hilft Alfred ihm nicht"
⇝ K(ˆ¬V(b),ˆ¬H(a,b))

Die Konstante B vom Typ s(i,p) steht für die Relation zwischen dem, der glaubt, und dem Sachverhalt, der geglaubt wird, die Konstante W vom Typ s(p,p) für die irreale Konditionalbeziehung, die Konstante K für die Kausalbeziehung. Das Zeichen ˆ soll keinen natürlichsprachigen Ausdruck übersetzen (etwa das "daß"), sondern anzeigen, daß der durch die auf ˆ folgende Formel ausgedrückte Satz einen bestimmten Sachverhalt beschreibt, der ggf. zu weiteren Objekten oder Sachverhalten in Beziehung steht (mit"Sachverhalt" meinen wir stets "möglichen Sachverhalt",mit "Tatsache" einen realen).

Bei Sätzen mit "sagen", "meinen", "behaupten" usw. muß man unterscheiden, ob hier eine Beziehung zwischen einer Person und einem Sachverhalt ausgedrückt wird, über den jene etwas sagt, meint oder behauptet, oder ob es sich um indirekte Rede handelt (hier läßt sich ein "daß" - Satz unter Weglassung des "daß" in den Konjunktiv setzen: "Hans meint, daß er krank ist" ergibt "Hans meint, er sei krank"). Ähnlich ist es bei einem Satz wie "Hans glaubt, daß er die Influenza hat", der eine Glaubensbeziehung zwischen Hans und einem Sachverhalt wiedergeben kann oder aber den Inhalt des Glaubens, so wie Hans ihn sieht (dann dürfen wir auch sagen: "Hans glaubt, er habe die Influenza". Er könnte z.B. annehmen, er habe bloß Schnupfen, jedoch "Influenza" für ein Synonym von "Schnupfen" halten und so der Meinung sein, er habe die Influenza). In der Sprache $\underline{S}$ wollen wir jedenfalls Satzgefüge (mit oder ohne "daß"), die eine indirekte Rede, einen subjektiven Glaubensinhalt oder generell einen genau bestimmten Wortlaut ausdrücken, **nicht** formalisieren.

Das Zeichen $\Box$ von $\underline{S}$ soll soviel heißen wie "Es existiert eine a priori gültige Beschreibung dafür, daß" oder "Es gibt eine a priori gültige Beschreibung des Sachverhalts, daß". A priori gültig seien dabei logische Tautologien, analytische Sätze, Definitionen, generell alle Sätze, deren Wahrheit sich aus einer gewissen Festlegung des Sprachgebrauchs ergibt.

Zum Abschluß noch zwei Beispiele der Formalisierung deutscher Sätze:

"Alfred hat Angst zu fliegen" $\Longrightarrow$ $A(a,\hat{}F(a))$

"Alfreds Befürchtung, daß Bruno verletzt ist, ist übertrieben"
$\Longrightarrow$ $Ü(f(a,\hat{}V(b))$

Die Konstante A vom Typ $s(i,p)$ steht für die Beziehung zwischen dem, der Angst hat, und der Sache, vor der er Angst hat (nämlich daß er fliegt). Die Konstante f vom Typ $i(i,p)$ steht für die Abbildung, die einer Person und einem Sachverhalt (hier: daß Bruno verletzt ist) die Befürchtung dieses Sachverhalts durch jene Person zuordnet.

Aus den wenigen hier aufgeführten Beispielen mag man ersehen, welche Möglichkeiten die Sprache $\underline{S}$ zur Formalisierung natürlichsprachiger Sätze bietet.

Wir kommen nun zur Interpretation von Termen der Sprache $\underline{S}$:

DEF. 12 Eine Interpretation von $\underline{S}$ ist ein Tripel $\langle \underline{U}, \underline{I}, \underline{\mathfrak{F}} \rangle$ mit der nichtleeren Individuenmenge $\underline{U}$, der nichtleeren Indexmenge $\underline{I}$ und der Menge $\underline{\mathfrak{F}}$, $\underline{\mathfrak{F}} := \{\underline{\mathfrak{F}}_i \mid i \in \underline{I}\}$, von Abbildungen, die auf der Menge der Variablen und Konstanten von $\underline{S}$ definiert sind.

Zu $\underline{\mathfrak{F}}$ wollen wir wieder a-Varianten $\underline{\mathfrak{F}}'$ definieren und analog x-Varianten, ab-, abc- u.ä. Varianten, wenn für alle i sich $\underline{\mathfrak{F}}_i$, $\underline{\mathfrak{F}}'_i$ höchstens in den Werten für a, x, a,b, a,b,c, ... unterscheiden. Sei $i \in \underline{I}$:

(j) Für alle Konstanten a und Variablen x und alle $j \in \underline{I}$ $\underline{\mathfrak{F}}_i(a), \underline{\mathfrak{F}}_i(x) \in \underline{U}$ sowie $\underline{\mathfrak{F}}_i(a) = \underline{\mathfrak{F}}_j(a)$, $\underline{\mathfrak{F}}_i(x) = \underline{\mathfrak{F}}_j(x)$.

(jj) Für alle Konstanten A vom Typ $s(t_1,\ldots,t_n)$ und alle Konstanten f vom Typ $i(t_1,\ldots,t_n)$ gilt

$\underline{\mathfrak{F}}_i(A) \subseteq \underline{M}_1 \times \ldots \times \underline{M}_n$, $\underline{\mathfrak{F}}_i(f) \in \underline{U}^{\underline{M}_1 \times \cdots \times \underline{M}_n}$, wobei für $t_j = i$ $\underline{M}_j = \underline{U}$, für $t_j = p$ $\underline{M}_j = 2^{\underline{I}}$ $(j = 1,\ldots,n)$.

Außerdem gilt für alle $j \in \underline{I}$ $\underline{\mathfrak{F}}_i(f) = \underline{\mathfrak{F}}_j(f)$.

Die Abbildungen $\underline{\mathfrak{F}}_i$, $i \in \underline{I}$, die auf der Menge der Terme von $\underline{S}$ definiert sind, ergeben sich nun wie folgt:

(i) Für alle Konstanten a und Variablen x gilt
$\underline{\mathfrak{F}}_i(a) = \underline{\mathfrak{F}}_i(a)$, $\underline{\mathfrak{F}}_i(x) = \underline{\mathfrak{F}}_i(x)$

(ii) Für alle Konstanten A, f und Terme $T_1, \ldots, T_n$ gilt
$\underline{\mathfrak{F}}_i(A(T_1,\ldots,T_n)) = \underline{\text{wahr}} \Leftrightarrow (\underline{\mathfrak{F}}_i(T_1),\ldots,\underline{\mathfrak{F}}_i(T_n)) \in \underline{\mathfrak{F}}_i(A)$
$\underline{\mathfrak{F}}_i(f(T_1,\ldots,T_n)) = (\underline{\mathfrak{F}}_i(f))(\underline{\mathfrak{F}}_i(T_1),\ldots,\underline{\mathfrak{F}}_i(T_n))$

(iii) Für alle Formeln P, Q und Terme S, T vom Typ i
$\underline{\mathfrak{F}}_i(\neg P) = \underline{\text{wahr}} \Leftrightarrow \underline{\mathfrak{F}}_i(P) = \underline{\text{falsch}}$
$\underline{\mathfrak{F}}_i(P \rightarrow Q) = \underline{\text{wahr}} \Leftrightarrow \underline{\mathfrak{F}}_i(P) = \underline{\text{falsch}}$ oder $\underline{\mathfrak{F}}_i(Q) = \underline{\text{wahr}}$
$\underline{\mathfrak{F}}_i(S = T) = \underline{\text{wahr}} \Leftrightarrow \underline{\mathfrak{F}}_i(S) = \underline{\mathfrak{F}}_i(T)$
$\underline{\mathfrak{F}}_i(\Box P) = \underline{\text{wahr}} \Leftrightarrow$ für alle j $\underline{\mathfrak{F}}_j(P) = \underline{\text{wahr}}$

(iv) Für alle Formeln P $\underline{\mathfrak{F}}_i(\hat{}P) = \{j \mid \underline{\mathfrak{F}}_j(P) = \underline{\text{wahr}}\}$

(v) Für alle Formeln P und Variablen x gilt
$\underline{\mathfrak{F}}_i(\forall x\, P[x]) = \underline{\text{wahr}} \Leftrightarrow$ für alle a-Varianten $\underline{\mathfrak{F}}'$ von $\underline{\mathfrak{F}}$ $\underline{\mathfrak{F}}'_i(P[a]) = \underline{\text{wahr}}$, wobei a in P[] nicht vorkommt

Sei $\forall P$ der Allabschluß einer Formel P. Dann gilt:

DEF. 13 Sei $\langle \underline{U}, \underline{I}, \underline{\mathfrak{F}} \rangle$ Interpretation, $\underline{i} \in \underline{I}$. Dann heißt eine Formel P $\underline{i}$-gültig in dieser Interpretation genau dann, wenn $\underline{\mathfrak{F}}_{\underline{i}}(\forall P) = \underline{\text{wahr}}$, sonst $\underline{i}$-ungültig.

P heißt allgemeingültig genau dann, wenn bei allen Interpretationen $\langle \underline{U}, \underline{I}, \underline{\mathfrak{F}} \rangle$ für alle $\underline{i} \in \underline{I}$ gilt: $\underline{\mathfrak{F}}_{\underline{i}}(\forall P) = \underline{\text{wahr}}$.

DEF. 14 Eine Menge M von Formeln heißt $\underline{i}$-gültig in $\langle \underline{U}, \underline{I}, \underline{\mathfrak{F}} \rangle$ genau dann, wenn jede Formel aus M in dieser Interpretation $\underline{i}$-gültig ist.

Eine Formel P folgt aus einer Menge M (abgekürzt "$M \models P$") genau dann, wenn bei allen $\langle \underline{U}, \underline{I}, \underline{\mathfrak{F}} \rangle$ für alle $\underline{i} \in \underline{I}$ gilt: wenn M $\underline{i}$-gültig, so auch P.

Ist M die leere Menge $\emptyset$, so schreiben wir statt "$\emptyset \models P$" auch "$\models P$". In diesem Fall ist P allgemeingültig.

Bevor wir nun zu einem Axiomensystem für unsere Logik kommen, sei noch eine Bezeichnungskonvention eingeführt: wenn T Term der Form $A(T_1,\ldots,T_n)$ oder $f(T_1,\ldots,T_n)$ ist, so möge $T\langle\rangle$ aus T durch Wegnahme von Argumenten von A bzw. f entstehen und $T\langle S\rangle$ aus T durch Einsetzen des Terms S in die Leerstellen (S muß dabei vom Typ der weggenommenen Argumente sein).

Das Axiomensystem A_S umfaßt nun alle Formeln folgender Gestalt:

A1: $P \to (Q \to P)$

A2: $(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$

A3: $(\neg P \to \neg Q) \to (Q \to P)$

A4: $\forall x\, P[x] \to P[T]$

A5: $\Box P \to P$

A6: $\Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q)$

A7: $\neg\Box P \to \Box\neg\Box P$

A8: $x = x$

A9: $x = y \to (x = z \to y = z)$

A10: $x = y \to (P\langle x\rangle \to P\langle y\rangle)$

A11: $x = y \to T\langle x\rangle = T\langle y\rangle$

A12: $x = y \to \Box x = y$

A13: $\Box(P \leftrightarrow Q) \to (R\langle {}^{\wedge}P\rangle \to R\langle {}^{\wedge}Q\rangle)$

A14: $\Box(P \leftrightarrow Q) \to T\langle {}^{\wedge}P\rangle = T\langle {}^{\wedge}Q\rangle$

Es gibt folgende drei Ableitungsregeln:

R1: $P\ ,\ P \to Q \vdash Q$

R2: $P \to Q[x] \vdash P \to \forall x\, Q[x]$ wobei x nicht frei in P vorkommt

R3: $P \vdash \Box P$

DEF. 15 Eine Formel P heißt Theorem von A_S genau dann, wenn eine Folge $P_1, \ldots, P_n$ mit $P_n := P$ existiert, wobei jedes P_i $(i \leq n)$ entweder Axiom ist oder aus P_j bzw. P_j, P_k $(j,k<i)$ durch einmaliges Anwenden einer Regel entsteht.
Die Folge $P_1, \ldots, P_n$ heißt Beweis von P.

DEF. 16 Eine Formel P heißt ableitbar aus einer Formelmenge M (abgekürzt "$M \vdash P$") genau dann, wenn eine Folge $P_1, \ldots, P_n$ mit $P_n := P$ existiert, wobei jedes P_i $(i \leq n)$ entweder Axiom oder aus M ist oder aus P_j bzw. P_j, P_k $(j,k<i)$ durch einmaliges Anwenden einer Regel entsteht. Dabei darf R3 nur dann angewendet werden, wenn P_j ein Theorem ist.
Die Folge $P_1, \ldots, P_n$ heißt Beweis von P aus M.

Ist M die leere Menge $\emptyset$, so schreiben wir statt "$\emptyset \vdash P$" auch "$\vdash P$". Es ergibt sich sofort, daß eine Formel genau dann Theorem ist, wenn sie aus der leeren Menge ableitbar ist.

Unser Axiomensystem umfaßt, formal gesehen, das System S5 der Modallogik: dem Schema A7 von A_S entspricht das Schema A8 von A_2, und in A_S sind die Formeln ableitbar, denen das Schema A7 von A_1 bzw. A_2 entspricht (vgl. Hughes & Cresswell (1968), II.8); die Bedeutung von $\Box$ ist in A_S natürlich anders als in A_1 und A_2. Außerdem enthält A_S einen Kalkül der Prädikatenlogik mit Gleichheit, und wir werden Theoreme dieses Kalküls und von S5 verwenden, ohne eine explizite Herleitung in A_S anzugeben.

Wir wollen nun auf zwei Komplexe eingehen, die gewisse Berührungspunkte besitzen, nämlich noch einmal auf die Bedeutung von $\Box$ sowie auf die Austauschbarkeit von Ausdrücken, die sich auf dasselbe Objekt oder denselben Sachverhalt beziehen.

Die Bedeutung von $\Box$ haben wir u.a. in der Regel R3 und den Schemata A5, A6, A7 zu erfassen gesucht. R3 und ihre Anwendung (vgl. DEF. 16) spiegeln die Tatsache wider, daß sich die Wahrheit eines Theorems aus dem Sprachgebrauch, aus der Verwendung der in ihm

vorkommenden Worte ergibt (diese werden so gebraucht, daß ein Theorem allzeit anwendbar d.h. immer wahr ist). Die Schemata A5 und A6 sind leicht zu verstehen, A7 ist wie folgt zu deuten: existiert für einen Sachverhalt keine a priori gültige Beschreibung - sei es, weil es nur empirische Beschreibungen gibt, sei es, weil der Sachverhalt gar nicht vorliegt - so ist die Feststellung jener Nichtexistenz eine Aussage über den Sprachgebrauch und demnach von apriorischer Gültigkeit (also impliziert $\neg \Box P \quad \Box \neg \Box P$).

Was das Schema A12 angeht, so wollen wir es anhand eines Beispiels betrachten: es werde "Goethe ist identisch mit dem Verfasser des 'Faust'" durch $g = v(f)$ ausgedrückt (v steht für die Abbildung, die jeder Dichtung ihren Autor zuordnet), woraus über A12 die Formel $\Box g = v(f)$ ableitbar ist d.h. "Es gibt eine a priori gültige Beschreibung dafür, daß Goethe mit dem Verfasser des 'Faust' identisch ist". Die gesuchte apriorische Beschreibung dieses Sachverhalts ist ganz einfach die, daß Goethe mit Goethe identisch ist, denn er ist ja laut Prämisse der Autor des "Faust".

Zur Austauschbarkeit: wir wollen davon ausgehen, daß bei den in $\underline{S}$ formalisierten Sätzen stets Ausdrücke, die dasselbe Objekt oder denselben Sachverhalt bezeichnen, ohne Änderung des Wahrheitswerts füreinander substituiert werden können. Betrachten wir z.B. den Satz "Bruno glaubt, daß er an Grippe leidet": wir dürfen stattdessen auch "Bruno glaubt, daß er an Influenza leidet" sagen, da wir den Sachverhalt des Grippehabens so oder so beschreiben können (wir dürfen es nicht sagen, sollte sich der Nebensatz auf Brunos subjektiven Glaubensinhalt beziehen. Aber dann wäre eine Formalisierung ausgeschlossen: vgl. unsere Diskussion auf S.2o). Wenn wir den ersten Satz durch $G(b,\hat{}L(b,g))$ und "Grippe ist identisch mit Influenza" mit $g = i$ ausdrücken, so ist aus beiden Formeln $G(b,\hat{}L(b,i))$ ableitbar (der Beweis sei dem Leser überlassen), was genau dem oben erwähnten Austauschprinzip entspricht.

Wenn für eine Äquivalenz eine a priori gültige Beschreibung existiert, so heißt das für uns, daß die beiden Seiten der Äquivalenz ein und denselben Sachverhalt bezeichnen und in Sätzen ohne Änderung der Wahrheitswerte füreinander substituiert werden dürfen (vgl. A13, A14). Beispiel: es gilt a priori, daß die Preise genau dann steigen, wenn das Geld an Wert verliert. Also kann man statt "Es ist zu erwarten, daß die Preise steigen" auch "Es ist zu erwarten, daß das Geld an Wert verliert" sagen.

Wir wollen nun anhand zweier Beispiele zeigen, wie sich in unserem Kalkül bestimmte Systeme der intensionalen Logik erfassen lassen. Dazu betrachten wir zunächst das System $\underline{G}$ der epistemischen Logik aus Kutschera (1976), 4.2, mit den Axiomenschemata

$G(P \to Q) \to (GP \to GQ)$

$GP \to \neg G \neg P$

$\bigvee x\, GP[x] \to G \bigvee x\, P[x]$

$GP \to GGP$

$\neg GP \to G \neg GP$ sowie der Regel $P \vdash GP$

Hinzuzufügen sind passende Axiomenschemata und Ableitungsregeln für die Prädikatenlogik; G ("Es wird geglaubt, daß") stellt ein neues Grundzeichen dar. Wir bilden nun die Menge M_G aller Formeln der folgenden Form:

$\Box(G(x,\hat{}(P \to Q)) \to (G(x,\hat{}P) \to G(x,\hat{}Q)))$

$\Box(G(x,\hat{}P) \to \neg G(x,\hat{}\neg P))$

$\Box(\bigvee y\, G(x,\hat{}P[y]) \to G(x,\hat{}\bigvee y\, P[y]))$

$\Box(G(x,\hat{}P) \to G(x,\hat{}G(x,\hat{}P)))$

$\Box(\neg G(x,\hat{}P) \to G(x,\hat{}\neg G(x,\hat{}P)))$

$\Box(\Box P \to G(x,\hat{}P))$

G ist eine Konstante vom Typ $s(i,p)$, der Term an der ersten Stelle steht für eine Person, die (rational) glaubt, der an der zweiten für einen geglaubten Sachverhalt; die aus M_G ableitbaren Formeln entsprechen dann den Theoremen von $\underline{G}$ (wenn man davon absieht, daß die Sprache $\underline{S}$ viel reichhaltiger ist als die $\underline{G}$ zugrundeliegende). Zwischen den beiden Ansätzen bestehen drei Unterschiede:

1. In den Formeln aus M_G wird eine Person erwähnt, die glaubt. Dies ist in $\underline{G}$ nicht möglich.

2. Die Formeln aus M_G sind von der Form $\Box(...)$, denn u.E. werden in der natürlichen Sprache die Sätze, die den Gebrauch von "glauben" festlegen und denen die Formeln aus M_G entsprechen, a priori als wahr gesetzt. Wenn wir über Glauben sprechen, so haben wir ein System von Sätzen zur Verfügung, dessen Struktur vorher nichtempirisch festgelegt wurde. Analoges gilt für die Sätze, die den Gebrauch von "notwendig", "obligatorisch", "weil", "wenn - dann" usw. beschreiben: es handelt sich nicht um empiri * sche Aussagen über Notwendigkeit, Kausalität usw., sondern um apriorische Bestimmungen des Sprachgebrauchs.

3. An die Stelle der Regel $P \vdash GP$ treten die Formeln der Form $\Box(\Box P \to G(x,\hat{}P))$ d.h. jeder Sachverhalt, für den eine a priori gültige Beschreibung existiert, wird von einer Person geglaubt (und dies ist wiederum a priori gültig).

Sei M' die Menge der Formeln von folgender Form:

$\Box(N(\hat{}P) \to P)$

$\Box(N(\hat{}(P \to Q)) \to (N(\hat{}P) \to N(\hat{}Q)))$

$\Box(\forall x\, N(\hat{}P[x]) \to N(\hat{}\forall x\, P[x]))$

und sei $M'' := \{\Box N(\hat{}R) \mid R$ Theorem von A_S oder $\Box R \in M'\}$. Dann entsprechen die aus $M' \cup M''$ ableitbaren Formeln den Theoremen des Systems T der Modallogik; die Konstante N ist vom Typ s(p) und steht für "Es ist notwendig, daß" oder "Notwendigerweise gilt, daß". Leider können wir nicht anstelle von M'' ein Schema $\Box(\Box P \to N(\hat{}P))$ benutzen, da es Sätze gibt, die zwar a priori, aber nicht mit Notwendigkeit gelten (vgl. Kripke (1972), Stegmüller (1975). Besagtes Schema ließe sich allerdings benutzen, wenn man $\Box$ anders deutete, nämlich als "Es gilt mit Notwendigkeit und gibt eine a priori gültige Beschreibung dafür, daß").

Korrektheit und Vollständigkeit von A_S

Wir kommen zu unseren beiden "Hauptsätzen"; dazu benötigen wir noch einige Definitionen und Hilfssätze.

DEF. 17 Die Funktion Grad sei wie folgt für Terme definiert:

(i) $Grad(T) = 0$, falls T Konstante oder Variable

(ii) $Grad(A(T_1,\ldots,T_n)) = Grad(f(T_1,\ldots,T_n)) = \max_{1 \le i \le n}\{Grad(T_i)\} + 1$

(iii) $Grad(P \to Q) = \max\{Grad(P), Grad(Q)\} + 1$

(iv) $Grad(\neg P) = Grad(\Box P) = Grad(\hat{}P) = Grad(\forall x\, P) = Grad(P) + 1$

(v) $Grad(S = T) = \max\{Grad(S), Grad(T)\} + 1$

SATZ 6 Sei $\langle \underline{U}, \underline{I}, \underline{\mathfrak{F}} \rangle$ Interpretation, T Term vom Typ i. Dann gilt für alle $\underline{i}, \underline{j}$: $\underline{\mathfrak{F}}_{\underline{i}}(T) = \underline{\mathfrak{F}}_{\underline{j}}(T)$

Beweis: (durch Induktion über den Bau der Terme)

Für Konstanten und Variablen gilt der Satz nach DEF.12(i)(j).

Sei nun $T := f(T_1,\ldots,T_n)$, und möge der Satz für die Terme

$T_1,\ldots,T_n$ gelten, sofern sie vom Typ i sind. Bei gegebenen $\underline{i}$, $\underline{j}$ ist nun $\underline{\mathfrak{I}}_{\underline{j}}(T) = (\underline{\mathfrak{I}}_{\underline{j}}(f))(\underline{\mathfrak{I}}_{\underline{j}}(T_1),\ldots,\underline{\mathfrak{I}}_{\underline{j}}(T_n))$ nach DEF. 12 (ii). Sei $j = 1,\ldots,n$: falls T_j vom Typ i, so gilt nach Induktionsannahme $\underline{\mathfrak{I}}_{\underline{i}}(T_j) = \underline{\mathfrak{I}}_{\underline{j}}(T_j)$; falls T_j vom Typ p, so muß es von der Form $\neg P$ sein, und nach DEF. 12(iv) folgt dann ebenfalls $\underline{\mathfrak{I}}_{\underline{i}}(T_j) = \underline{\mathfrak{I}}_{\underline{j}}(T_j)$. Da nach DEF. 12 (ii) gilt, daß $\underline{\mathfrak{I}}_{\underline{i}}(f) = \underline{\mathfrak{I}}_{\underline{j}}(f)$, ist $\underline{\mathfrak{I}}_{\underline{i}}(T) = (\underline{\mathfrak{I}}_{\underline{j}}(f))(\underline{\mathfrak{I}}_{\underline{j}}(T_1),\ldots,\underline{\mathfrak{I}}_{\underline{j}}(T_n)) = \underline{\mathfrak{I}}_{\underline{j}}(T)$.

SATZ 7 (Überführungstheorem) Sei S Term vom Typ i, $\langle \underline{U}, \underline{I}, \underline{\mathfrak{I}} \rangle$ Interpretation, $\underline{\mathfrak{I}}'$ a-Variante von $\underline{\mathfrak{I}}$, so daß für alle $\underline{i}$ $\underline{\mathfrak{I}}'_{\underline{i}}(a) = \underline{\mathfrak{I}}_{\underline{i}}(S)$, und $\underline{\mathfrak{I}}''$ x-Variante von $\underline{\mathfrak{I}}$, so daß für alle $\underline{i}$ $\underline{\mathfrak{I}}''_{\underline{i}}(x) = \underline{\mathfrak{I}}_{\underline{i}}(S)$ (man beachte, daß nach SATZ 6 die $\underline{\mathfrak{I}}_{\underline{i}}(S)$ für alle $\underline{i}$ übereinstimmen). Dann gilt:

(i) Für alle Terme $T[a]$, wobei a nicht in $T[S]$ vorkommt, gilt $\underline{\mathfrak{I}}'_{\underline{i}}(T[a]) = \underline{\mathfrak{I}}_{\underline{i}}(T[S])$ für alle $\underline{i}$.

(ii) Für alle Terme $T[x]$, wobei x nicht frei in $T[S]$ vorkommt, gilt $\underline{\mathfrak{I}}''_{\underline{i}}(T[x]) = \underline{\mathfrak{I}}_{\underline{i}}(T[S])$ für alle $\underline{i}$.

Beweis: Wir beweisen Teil (i) durch Induktion über den Grad der Terme $T[a]$. Für Terme vom Grad o d.h. falls T Konstante oder Variable, müssen wir zwei Fälle unterscheiden:
Falls $T[a] = a$, $T[S] = S$, so gilt der Satz sofort.
Falls $T = T[\,] = T[a] = T[S]$, muß T von a verschieden sein, da a nicht in $T[S]$ vorkommt. Da aber $\underline{\mathfrak{I}}'$ a-Variante ist, gilt $\underline{\mathfrak{I}}'_{\underline{i}}(T) = \underline{\mathfrak{I}}_{\underline{i}}(T)$ für alle $\underline{i}$ und somit der Satz.

Sei der Satz gültig für alle Terme der Form $T[a]$ mit maximalem Grad m, und sei nun:

(i) $T[a] := A(T_1[a],\ldots,T_n[a])$, $T[S] := A(T_1[S],\ldots,T_n[S])$, $\mathrm{Grad}(T_i[a]) \leq m$ für $i = 1,\ldots,n$. Nach Induktionsannahme gilt dann für die i $\underline{\mathfrak{I}}'_{\underline{i}}(T_i[a]) = \underline{\mathfrak{I}}_{\underline{i}}(T_i[S])$ für alle $\underline{i}$, da a nicht in $T[S]$ und somit nicht in den $T_i[S]$ vorkommt. Hieraus und wegen $\underline{\mathfrak{I}}'_{\underline{i}}(A) = \underline{\mathfrak{I}}_{\underline{i}}(A)$ für alle $\underline{i}$ folgt dann $(\underline{\mathfrak{I}}'_{\underline{i}}(T_1[a]),\ldots) \in \underline{\mathfrak{I}}'_{\underline{i}}(A) \Leftrightarrow (\underline{\mathfrak{I}}_{\underline{i}}(T_1[S]),\ldots) \in \underline{\mathfrak{I}}_{\underline{i}}(A)$ und somit die Behauptung des Satzes.

Ist $T[a]$ von der Form $f(T_1[a],\ldots,T_n[a])$, $\neg P[a]$, $P[a] \to Q[a]$ oder $T_1[a] = T_2[a]$, wobei der Grad der Teil-terme m nicht überschreitet, ergibt sich der Satz analog zu oben (Beweise seien dem Leser überlassen).

(ii) $T[a] := {}^{\wedge}P[a]$, $T[S] := {}^{\wedge}P[S]$, $Grad(P[a]) = m$. Dann gilt nach Induktionsannahme für alle i $\mathfrak{F}'_i(P[a]) = \mathfrak{F}_i(P[S])$ und somit $\{j \mid \mathfrak{F}'_j(P[a]) = \underline{wahr}\} = \{j \mid \mathfrak{F}_j(P[S]) = \underline{wahr}\}$. Hieraus folgt nach DEF. 12(iv) sofort die Behauptung des Satzes.

(iii) $T[a] := \Box P[a]$, $T[S] := \Box P[S]$, $Grad(P[a]) = m$. Dann gilt nach Induktionsannahme für alle i $\mathfrak{F}'_i(P[a]) = \mathfrak{F}_i(P[S])$ und somit: für alle j $\mathfrak{F}'_j(P[a]) = \underline{wahr}$ $\Leftrightarrow$ für alle j $\mathfrak{F}_j(P[S]) = \underline{wahr}$. Hieraus folgt nach DEF. 12(iii) sofort die Behauptung des Satzes.

(iv) $T[a] := \forall x\, P[x,a]$, $T[S] := \forall x\, P[x,S]$, $Grad(P[x,a]) = m$. Wir zeigen nun, daß für alle i gilt: $\mathfrak{F}'_i(\forall x\, P[x,a]) = \underline{falsch}$ $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{F}_i(\forall x\, P[x,S]) = \underline{falsch}$ (hieraus ergibt sich dann sofort die Behauptung des Satzes), oder anders ausgedrückt: es gibt eine b-Variante Ψ' von $\mathfrak{F}'$ mit $\Psi'_i(P[b,a]) = \underline{falsch}$ $\Leftrightarrow$ es gibt eine b-Variante Ψ von $\mathfrak{F}$ mit $\Psi_i(P[b,S]) = \underline{falsch}$.
"$\Rightarrow$": Sei Ψ' gegeben. Man wähle diejenige b-Variante Ψ , für die $\Psi'_j(b) = \Psi_j(b)$ für alle j gilt. Dann wende man den Satz auf $\langle \underline{U}, \underline{I}, \Psi \rangle$ an, wobei ja $\Psi'_i(a) = \Psi_i(S)$, und nach Induktionsannahme impliziert dann $\Psi'_i(P[b,a]) = \underline{falsch}$ $\Psi_i(P[b,S]) = \underline{falsch}$.
"$\Leftarrow$": Sei Ψ gegeben. Man wähle diejenige b-Variante Ψ', für die $\Psi'_j(b) = \Psi_j(b)$ für alle j , und verfahre analog.
Beweis für Teil (ii) sei dem Leser überlassen.

SATZ 8 (Koinzidenztheorem) Sei $\langle \underline{U}, \underline{I}, \mathfrak{F} \rangle$ eine Interpretation und $\mathfrak{F}'$ a-Variante von $\mathfrak{F}$. Dann gilt für alle Terme T , in denen die Konstante a nicht vorkommt: für alle $i \in I$ ist $\mathfrak{F}'_i(T) = \mathfrak{F}_i(T)$

Beweis: Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus dem für SATZ 7 , wenn man davon ausgeht, daß stets $T = T[\,] = T[a] = T[S]$.

SATZ 9 Falls P ein Theorem ist, so ist P allgemeingültig.

Beweis: Wir zeigen zunächst, daß eine Formel genau dann allgemeingültig ist, wenn sie bei jeder Interpretation für alle Indizes i i-gültig ist (nennen wir letzteres einmal Allgemeingültigkeit'). Zum Beweis zeigen wir: es gibt eine Interpretation $\langle \underline{U}, \underline{I}, \mathfrak{F} \rangle$ und ein $j \in I$ mit $\mathfrak{F}_j(P[x]) = \underline{falsch}$ $\Leftrightarrow$ es gibt eine Interpretation $\langle \underline{U}', \underline{I}', \Psi \rangle$ und ein $j' \in I'$ mit $\Psi_{j'}(\forall x\, P[x]) = \underline{falsch}$ (hieraus ergibt sich

dann leicht die Behauptung):

"$\Rightarrow$": sei $\mathfrak{F}'$ die a-Variante von $\mathfrak{F}$ mit $\mathfrak{F}'_i(a) = \mathfrak{F}_i(x)$ für alle i, wobei a in $P[\,]$ nicht vorkommt. Nach SATZ 7 gilt $\mathfrak{F}'_j(P[a]) =$ falsch und somit $\mathfrak{F}_j(\forall x\, P[x]) =$ falsch. Damit ist die gesuchte Interpretation und der gesuchte Index gefunden.

"$\Leftarrow$": sei Ψ' a-Variante von Ψ mit $\Psi'_j(P[a]) =$ falsch, und sei daneben Ψ'' x-Variante von Ψ', wobei x in $P[a]$ nicht vorkommt, mit $\Psi''_i(x) = \Psi'_i(a)$ für alle i. Nach SATZ 7 gilt dann $\Psi''_j(P[x]) =$ falsch, und damit ist die gesuchte Interpretation und der gesuchte Index gefunden.

Wir zeigen nun, daß jedes Axiom von A_S allgemeingültig' und somit allgemeingültig ist, am Beispiel des Schemas A4 (der Nachweis für die anderen sei dem Leser überlassen): es ist für alle $\langle U, I, \mathfrak{F}\rangle$ und $i \in I$ zu zeigen, daß $\mathfrak{F}_i(\forall x\, P[x] \rightarrow P[T]) =$ wahr. Falls $\mathfrak{F}_i(\forall x\, P[x]) =$ wahr, so gilt für alle a-Varianten $\mathfrak{F}'$ (a komme in $P[T]$ nicht vor): $\mathfrak{F}'_i(P[a]) =$ wahr. Sei nun $\mathfrak{F}''$ a-Variante mit $\mathfrak{F}''_j(a) = \mathfrak{F}_j(T)$ für alle j. Dann gilt nach SATZ 7 wegen $\mathfrak{F}''_i(P[a]) =$ wahr, daß $\mathfrak{F}_i(P[T]) =$ wahr.

Wir zeigen nun anhand der Regel R2 (für R1 und R3 sei der Nachweis dem Leser überlassen): folgt eine Formel durch eine Ableitungsregel aus einer (zwei) allgemeingültigen' Formel(n), so ist sie allgemeingültig' (und das Ganze gilt analog für "allgemeingültig"). Angenommen, die Formel $P \rightarrow \forall x\, Q[x]$ ist nicht allgemeingültig' d.h. es gibt ein $\langle U, I, \mathfrak{F}\rangle$ und $i \in I$ mit $\mathfrak{F}_i(P \rightarrow \forall x\, Q[x]) =$ falsch. Dann existiert aber eine a-Variante $\mathfrak{F}'$ (a möge in P nicht vorkommen) mit $\mathfrak{F}'_i(Q[a]) =$ falsch und wegen SATZ 8 $\mathfrak{F}'_i(P) =$ wahr, also $\mathfrak{F}'_i(P \rightarrow Q[a]) =$ falsch. Wenn nun $P \rightarrow Q[x]$ allgemeingültig' ist, so auch $\forall x\,(P \rightarrow Q[x])$: in diesem Fall gilt für alle a-Varianten $\mathfrak{F}''$ $\mathfrak{F}''_i(P \rightarrow Q[a]) =$ wahr, also auch für $\mathfrak{F}'$. Hier liegt also ein Widerspruch vor; $P \rightarrow \forall x\, Q[x]$ ist dann auch allgemeingültig'.

Wir können nun den ersten Hauptsatz dieses Kapitels beweisen:

SATZ 10 Ist eine Formel aus einer Formelmenge ableitbar, so folgt sie auch aus dieser Menge.

Beweis: Da jedes Axiom allgemeingültig ist, folgt es auch aus jeder Formelmenge, und ihre Elemente folgen ebenfalls aus ihr.

Wir zeigen nun: entsteht eine Formel P durch eine Regel aus einer (zwei) Formel(n), die aus einer Formelmenge M folgen, so folgt auch P aus M .

R1: Sei M nun $\underline{i}$-gültig in $\langle \underline{U}, \underline{I}, \underline{\mathfrak{I}} \rangle$ und desgleichen die Formeln P , $P \to Q$ d.h. $\underline{\mathfrak{I}}_{\underline{i}}(\forall P) = \underline{\mathfrak{I}}_{\underline{i}}(\forall (P \to Q)) = \underline{\text{wahr}}$, und seien $x_1,\ldots,x_n$ alle Variablen, die in P oder Q frei vorkommen. P', $P' \to Q'$ mögen aus P , $P \to Q$ durch Ersetzen aller freien Vorkommen der x_i durch Konstanten a_i $(i=1,\ldots,n)$ entstehen, die sonst nirgends auftreten. Dann gilt für alle $a_1 \ldots a_n$-Varianten $\underline{\mathfrak{I}}'$ von $\underline{\mathfrak{I}}$: $\underline{\mathfrak{I}}'_{\underline{i}}(P') = \underline{\mathfrak{I}}'_{\underline{i}}(P' \to Q') = \underline{\text{wahr}}$, also $\underline{\mathfrak{I}}'_{\underline{i}}(Q') = \underline{\text{wahr}}$ und somit $\underline{\mathfrak{I}}_{\underline{i}}(\forall Q) = \underline{\text{wahr}}$. Mit anderen Worten: Q folgt aus M .

R2: Es möge $P \to \forall x\, Q[x]$ aus der $\underline{i}$-gültigen Formel $P \to Q[x]$ entstehen d.h. $\underline{\mathfrak{I}}_{\underline{i}}(\forall (P \to Q[x])) = \underline{\text{wahr}}$. Seien $x_1,\ldots,x_n$ die Variablen, die außer x noch frei in P oder $Q[x]$ vorkommen, und mögen P', $Q'[x]$ aus P , $Q[x]$ durch Ersetzen aller freien x_i durch neue Konstanten a_i entstehen. Es gilt demnach für alle $aa_1 \ldots a_n$-Varianten $\underline{\mathfrak{I}}'$ von $\underline{\mathfrak{I}}$: $\underline{\mathfrak{I}}'_{\underline{i}}(P' \to Q'[a]) = \underline{\text{wahr}}$. Angenommen, $\underline{\mathfrak{I}}''_{\underline{i}}(P' \to \forall x\, Q'[x]) = \underline{\text{falsch}}$, $\underline{\mathfrak{I}}''$ $a_1 \ldots a_n$-Variante von $\underline{\mathfrak{I}}$. Dann gibt es aber eine $aa_1 \ldots a_n$-Variante, bei der $P' \to Q'[a]$ $\underline{i}$-ungültig wird (vgl. Beweis SATZ 9), also muß gelten, daß $\underline{\mathfrak{I}}_{\underline{i}}(\forall (P \to \forall x\, Q[x])) = \underline{\text{wahr}}$ und daß $P \to \forall x\, Q[x]$ aus M folgt.

R3: Ist eine Formel $\Box P$ aus P entstanden, so ist $\Box P$ dann $\underline{i}$-gültig, wenn es P ist, denn P muß Theorem und somit auch allgemeingültig sein, was die Allgemeingültigkeit von $\Box P$ liefert. $\Box P$ folgt dann also aus M .

Wir zeigen nun, daß eine Formel aus einer Formelmenge ableitbar ist, wenn sie daraus folgt. Dazu benötigen wir wieder eine Reihe von Definitionen und Hilfssätzen:

DEF. 18 Ein Satz P heißt konsistent genau dann, wenn $\neg P$ kein Theorem von A_S ist, und M-konsistent genau dann, wenn $\neg P$ nicht aus einer Satzmenge M ableitbar ist.

Eine Menge von Sätzen heißt (M-) konsistent genau dann, wenn jede Konjunktion von Sätzen aus dieser Menge (M-) konsistent ist.

Es ergibt sich leicht, daß ein M-konsistenter Satz bzw. eine M-konsistente Menge von Sätzen auch konsistent ist.

DEF. 19 Die Menge der E-Formen von $\underline{S}$ ergibt sich wie folgt:

(i) Jede Zeichenkette $\exists x\, P[x] \to P[\,]$, in der keine Variable frei vorkommt, ist eine E-Form .

(ii) Jede Zeichenkette $\neg\Box P \to \neg\Box(\neg Q[\,] \to P)$, wobei $Q[\,]$ E-Form und P Satz ist, ist eine E-Form.

(iii) Die Menge der E-Formen ist die kleinste Menge, die die Bedingungen (i) und (ii) erfüllt.

Die Menge der T-Formen von $\underline{S}$ ist die Menge aller Zeichenketten, die aus einem Term T vom Typ i , in dem keine Variable frei vorkommt, bestehen, gefolgt von $=$ (also aller Zeichenketten der Form $T =$).

SATZ 11 Sei $R[\,]$ eine E-Form und y eine Variable, die darin nicht vorkommt. Dann ist $\exists y\, R[y]$ Theorem von A_S .

Beweis: (durch Induktion über den Bau der E-Formen) Falls $R[\,]$ von der Form $\exists x\, P[x] \to P[\,]$, so ergibt sich aus der Prädikatenlogik, daß $\exists y(\exists x\, P[x] \to P[y])$ Theorem ist.

Sei $R[\,]$ von der Form $\neg\Box P \to \neg\Box(\neg Q[\,] \to P)$, und gelte der Satz für $Q[\,]$. Dann ergibt sich folgender Beweis:

$\vdash \exists y\, Q[y]$	Induktionsannahme
$\vdash \neg P \to \exists y\, Q[y] \wedge \neg P$	nach Aussagenlogik
$\vdash \neg P \to \exists y(Q[y] \wedge \neg P)$	da y nicht in $\neg P$
$\vdash \forall y(\neg Q[y] \vee P) \to P$	Kontraposition, $\exists$ zu $\forall$
$\vdash \Box(\forall y(\ldots) \to P)$	Regel R3
$\vdash \Box\forall y(\ldots) \to \Box P$	Schema A6 , Regel R1
$\vdash \forall y\Box(\ldots) \to \Box P$	(siehe unten)
$\vdash \neg\Box P \to \exists y\neg\Box(\ldots)$	Kontraposition, $\forall$ zu $\exists$
$\vdash \exists y(\neg\Box P \to \neg\Box(\neg Q[y] \to P)$	da y nicht in $\neg\Box P$

Der obige Schritt beruht auf der Formel $\forall y\Box(\ldots) \to \Box\forall y(\ldots)$, die ein Theorem von A_S darstellt. Zusammen mit $\Box\forall y(\ldots) \to \Box P$ ergibt sich dann besagte Zeile.

Wir erweitern nun $\underline{S}$ durch abzählbar viele neue Konstanten b_1 , b_2 , b_3 ,... (das seien ausnahmsweise Zeichen der Objektsprache) vom Typ i . Seien dann $\{R_i[\,] \mid i \in \mathbb{N}\}$, $\{T_i = \mid i \in \mathbb{N}\}$ die Mengen der E- bzw. T-Formen von $\underline{S}$ unter irgendeiner Aufzählung (ab jetzt wollen wir einfach $\{R_i[\,]\}_{\mathbb{N}}$, $\{T_i =\}_{\mathbb{N}}$ schreiben, und analog bei ähnlich aufgezählten Mengen).

Sei P_o ein M-konsistenter Satz und M Menge von Sätzen, wobei weder P_o noch die Sätze aus M eine der neuen Konstanten aufweisen. Wir bilden nun wie folgt Mengen N_i ($i \in \mathbb{N}$) :

(i) $N_1 := \{P_o\}$
(ii) $N_{2i} := N_{2i-1} \cup \{T_i = a\}$
(iii) $N_{2i+1} := N_{2i} \cup \{R_i[a']\}$

Hier bezeichne a die Konstante b_j mit dem kleinsten j , die weder in Sätzen aus N_{2i-1} noch in T_i vorkommt, und a' die Konstante b_k mit dem kleinsten k , die weder in Sätzen aus N_{2i} noch in $R_i[\,]$ vorkommt. Wir fügen also $\{P_o\}$ abwechselnd Sätze hinzu, die aus einer T- bzw. E-Form durch Einsetzen einer neuen Konstante entstanden sind. Es gilt nun folgender Satz:

SATZ 12 Jede Menge N_j ($j \in \mathbb{N}$) ist M-konsistent.

Beweis: N_1 , also $\{P_o\}$, ist M-konsistent, da P_o M-konsistent. Wir zeigen nun: ist N_j M-konsistent, dann auch N_{j+1} d.h. (nach Kontraposition) existiert eine Konjunktion Q von Sätzen aus N_{j+1} mit $M \vdash \neg Q$, so gibt es auch eine Konjunktion Q' von Sätzen aus N_j mit $M \vdash \neg Q'$. N_{j+1} kann dabei

(i) durch Hinzufügen eines Satzes $R_i[a]$ oder
(ii) durch Hinzufügen eines Satzes $T_i = a$

aus N_j entstanden sein. Wir betrachten zunächst (i) :

Sei $M \vdash \neg Q$, und sei Q o.B.d.A. von der Form $P \wedge R_i[a]$, wobei P eine Konjunktion von Sätzen aus N_j ist. Sei $P_1, \ldots, P_n$ ($P_n := \neg Q$) ein Beweis von $\neg(P \wedge R_i[a])$ aus M , und komme in keinem Glied der Folge y vor. Dann ist auch $P'_1, \ldots, P'_n$ ($P'_n = \neg(P \wedge R_i[y])$ ein Beweis aus M , wobei die P'_l , $l=1,\ldots,n$, durch Ersetzen aller Vorkommen von a durch y aus den P_l entstehen, und zwar aus folgenden Gründen:

(i) Falls $P_l \in M$, so $P'_l = P_l$, da a eine neue Konstante ist, die in den Sätzen aus M nicht vorkommt.
(ii) Falls P_l Axiom, so auch P'_l .
(iii) Falls P_l aus P_k (und P_m) durch eine Ableitungsregel entsteht, so entsteht P'_l aus P'_k (und P'_m) durch Anwendung der gleichen Regel.
(iv) da a nach Konstruktion von N_{j+1} nicht in $P \wedge R_i[\,]$ vorkommt, gilt $P'_n = \neg(P \wedge R_i[y])$. Nun gilt:

$M \vdash \neg(P \wedge R_i[y])$	siehe vorige Seite
$M \vdash P \rightarrow \neg R_i[y]$	nach Aussagenlogik
$M \vdash P \rightarrow \neg \exists y\, R_i[y]$	Regel R2 mit Umwandlung $\forall$ in $\exists$
$M \vdash \exists y\, R_i[y] \rightarrow \neg P$	Kontraposition
$M \vdash \neg P$	wegen $\vdash \exists y\, R_i[y]$ (SATZ 11)

P ist also die gesuchte Konjunktion Q' von Sätzen aus N_j ; diese Menge ist demnach nicht M-konsistent. Nun zu Fall (ii):

Sei $M \vdash \neg Q$, wobei Q für einen Satz $P \wedge T_i = a$ steht o.B.d.A. und P für eine Konjunktion von Sätzen aus N_j . Analog zu Fall (i) gilt: wenn $M \vdash \neg(P \wedge T_i = a)$, so auch $M \vdash \neg(P \wedge T_i = y)$, wobei y im Beweis von $\neg Q$ nicht vorkommt. Es ergibt sich dann folgender Beweis:

$M \vdash \neg(P \wedge T_i = y)$	siehe oben
$M \vdash P \rightarrow \neg T_i = y$	nach Aussagenlogik
$M \vdash P \rightarrow \forall y \neg T_i = y$	Regel R2
$M \vdash \forall y \neg T_i = y \rightarrow \neg T_i = T_i$	Schema A4
$M \vdash P \rightarrow \neg T_i = T_i$	folgt aus den letzten 2 Zeilen
$M \vdash T_i = T_i \rightarrow \neg P$	Kontraposition
$M \vdash \neg P$	folgt aus A8 durch R1

P ist wiederum die gesuchte Konjunktion Q', N_j also nicht M-konsistent.

Man sieht leicht, daß auch $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} N_i$ M-konsistent ist: wäre sie es nicht d.h. existierte eine Konjunktion Q von Sätzen daraus mit $M \vdash \neg Q$, so müßte es ein N_j geben (eines, welches die Glieder von Q enthielte), das nicht M-konsistent ist.

Sei $\{P_i\}_{\mathbb{N}}$ die Menge aller Sätze von $\underline{S}$ unter irgendeiner Aufzählung. Wir bilden dann wie folgt Mengen L_j $(j \in \mathbb{N})$:

(i) $L_1 := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} N_i$

(ii) $L_{j+1} := L_j \cup \{P_j\}$ falls $L_j \cup \{P_j\}$ M-konsistent

$:= L_j$ sonst

Die Menge $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} L_i$ nennen wir M_1 , und es gilt der Satz:

SATZ 13 (i) M_1 ist M-konsistent und maximal M-konsistent d.h. fügte man einen Satz P , $P \notin M_1$, hinzu, so entstünde eine M-inkonsistente Menge.

(ii) Für jeden Satz P gilt entweder $P \in M_1$ oder $\neg P \in M_1$.

(iii) Falls ein Satz P aus M ableitbar ist, so $P \in M_1$.

(iv) Falls Sätze P , $P \rightarrow Q$ in M_1 sind, dann auch Q .

Beweis: (i) Wäre M_1 nicht M-konsistent, so gäbe es eine Konjunktion Q von Sätzen aus M_1 mit $M \vdash \neg Q$ und ein M-inkonsistentes L_j. Dies widerspricht der Konstruktion von M_1. Wenn nun ein Satz P nicht in M_1 ist, so gibt es ein L_j mit $L_j \cup \{P\}$ M-inkonsistent (vgl. Konstruktion von M_1), und $M_1 \cup \{P\}$ wäre es dann auch.

(ii) Angenommen, P und $\neg P$ sind in M_1. Dann wäre aber M_1 nicht M-konsistent, da $M \vdash \neg (P \wedge \neg P)$.
Angenommen, weder P noch $\neg P$ sind in M_1. Dann gibt es L_i, L_j mit M-inkonsistenten $L_i \cup \{P\}$, $L_j \cup \{\neg P\}$ und Konjunktionen Q_i, Q_j von Sätzen aus L_i, L_j mit $M \vdash \neg (Q_i \wedge P)$, $M \vdash \neg (Q_j \wedge \neg P)$. Dann gilt auch $M \vdash \neg (Q_i \wedge Q_j \wedge P)$, $M \vdash \neg (Q_i \wedge Q_j \wedge \neg P)$, anders gesagt $M \vdash P \rightarrow \neg (Q_i \wedge Q_j)$, $M \vdash \neg P \rightarrow \neg (Q_i \wedge Q_j)$ und demnach $M \vdash \neg (Q_i \wedge Q_j)$ (nach Aussagenlogik). Dann wäre aber $L_i \cup L_j$ und somit M_1 nicht M-konsistent.

(iii) Angenommen, $M \vdash P$, aber $P \notin M_1$. Dann ist nach (ii) $\neg P \in M_1$ und wegen $M \vdash \neg (\neg P)$ M_1 nicht konsistent.

(iv) Angenommen, P und $P \rightarrow Q$ sind in M_1, aber nicht Q. Dann ist nach (ii) $\neg Q \in M_1$. Nun gilt nach Aussagenlogik $M \vdash \neg (P \wedge (P \rightarrow Q) \wedge \neg Q)$: M_1 wäre nicht konsistent.

Aus Punkt (iii) folgt sofort, daß M und die Menge aller Sätze, die Theoreme von A_S sind, Teilmengen von M_1 sind.

Sei nun $\{\neg \Box P_i\}_{\mathbb{N}}$ die Menge aller Sätze aus M_1 der Form $\neg \Box P$ unter irgendeiner Aufzählung und sei $\{R_i[\,]\}_{\mathbb{N}}$ wieder die Menge aller E-Formen von $\underline{S}$. Dann enthält M_1 für ein gegebenes $k \in \mathbb{N}$ die folgenden Sätze, die aus E-Formen durch Einsetzen gewisser Konstanten entstanden sind (vgl. die Konstruktion der Mengen N_i, deren Vereinigung ja Teilmenge von M_1 ist):

$$\neg \Box P_k \rightarrow \neg \Box (\neg R_1[a_1] \vee P_k)$$
$$\neg \Box (\neg R_1[a_1] \vee P_k) \rightarrow \neg \Box (\neg R_2[a_2] \vee (\neg R_1[a_1] \vee P_k))$$
$$\neg \Box (\neg R_2[a_2] \vee \neg R_1[a_1] \vee P_k) \rightarrow \neg \Box (\neg R_3[a_3] \vee (\neg R_2[a_2] \vee \neg R_1[a_1] \vee P_k))$$
$$\vdots$$

$a_1, a_2, a_3, \ldots$ bezeichnen wieder die neuen Konstanten aus $\{b_i\}_{\mathbb{N}}$ (man darf nicht folgern, daß a_1 b_1 bezeichnet usw.: die Indizierung der $a_1, a_2, a_3, \ldots$ orientiert sich an den Indizes der E-Formen).

SATZ 14 Sei $\{\Box Q_i\}_{\mathfrak{N}}$ die Menge aller Sätze aus M_1 der Form $\Box Q$ unter irgendeiner Aufzählung. Dann gilt:

$\{\neg P_k\} \cup \{Q_i\}_{\mathfrak{N}} \cup \{R_i[a_i]\}_{\mathfrak{N}}$ ist konsistent.

Beweis: Angenommen, die Menge ist inkonsistent. Dann existieren

$Q_{i1}, \ldots, Q_{im}$ und $R_{j1}[a_{j1}], \ldots, R_{jn}[a_{jn}]$ mit

$\vdash \neg (Q_{i1} \wedge \ldots \wedge Q_{im} \wedge R_{j1}[a_{j1}] \wedge \ldots \wedge R_{jn}[a_{jn}] \wedge \neg P_k)$.

Sei $l = \max\{j1, \ldots, jn\}$; dann gilt:

$\vdash \neg (Q_{i1} \wedge \ldots \wedge Q_{im} \wedge R_1[a_1] \wedge R_{l-1}[a_{l-1}] \wedge \ldots \wedge R_1[a_1] \wedge \neg P_k)$

$\vdash (Q_{i1} \wedge \ldots \wedge Q_{im}) \rightarrow (\neg R_1[a_1] \vee \ldots \vee \neg R_1[a_1] \vee P_k)$

$\vdash \Box((\ldots) \rightarrow (---))$ (Regel R3)

$\vdash \Box(\ldots) \rightarrow \Box(---)$ (Schema A6, Regel R1)

$\vdash \neg (\Box(Q_{i1} \wedge \ldots \wedge Q_{im}) \wedge \neg \Box(---))$

$\vdash \neg (\Box Q_{i1} \wedge \ldots \wedge \Box Q_{im} \wedge \neg \Box(\neg R_1[a_1] \vee \ldots \vee \neg R_1[a_1] \vee P_k))$

(der letzte Schritt ergibt sich über Sätze der Form $(\Box P \wedge \Box Q) \rightarrow \Box(P \wedge Q)$, die Theoreme von S5 und somit von A_S sind) Aus der letzten Zeile der Schlußkette folgt nun die Inkonsistenz von M_1 , denn $\Box Q_{i1}, \ldots, \Box Q_{im}$, $\neg \Box(---)$ sind in M_1 : $\neg \Box P_k$, $\neg \Box P_k \rightarrow \neg \Box(\neg R_1[a_1] \vee P_k)$ in M_1 (vgl. vorige Seite), so auch $\neg \Box(\neg R_1[a_1] \vee P_k)$ (nach SATZ 13 (iv)) usw. bis $\neg \Box(\neg R_1[a_1] \vee \ldots \vee \neg R_1[a_1] \vee P_k) \in M_1$. Dann ist M_1 aber M-inkonsistent. Also muß unsere Ausgangsmenge konsistent gewesen sein.

Wir erweitern nun $\{\neg P_k\} \cup \{Q_i\}_{\mathfrak{N}} \cup \{R_i[a_i]\}_{\mathfrak{N}}$ analog zur Konstruktion von M_1 , indem wir Sätze aus $\{P_i\}_{\mathfrak{N}}$ hinzufügen, sofern die entstehende Menge konsistent ist, und schließlich die Vereinigung all dieser Mengen bilden. Diese nennen wir M_{1k} und bezeichnen sie als Subordinate für $\neg \Box P_k$. Für M_{1k} gilt dann: M_{1k} ist maximal konsistent, und für alle Sätze P , $P \rightarrow Q$ gilt entweder $P \in M_{1k}$ oder $\neg P \in M_{1k}$ und, falls $\vdash P$, so $P \in M_{1k}$, und, falls P , $P \rightarrow Q \in M_{1k}$, so $Q \in M_{1k}$ (vgl. SATZ 13 ; der Beweis für die Behauptungen hier ergibt sich aus dem für SATZ 13, wenn man dort M überall durch $\mathfrak{N}$ ersetzt).

Wir bilden für alle anderen $\neg \Box P_j$ ebenfalls Subordinaten M_{1j} . M_{1k} und die M_{1j} enthalten wiederum Sätze der Form $\neg \Box P$, für die wir dann Subordinaten M_{1ki} bzw. M_{1ji} bilden usw.usf..

Wir erhalten auf diese Weise ein System von abzählbar vielen maximal konsistenten Mengen. Die Menge der Indextupel dieser Mengen wollen wir $\underline{I}$ nennen d.h. $\underline{I} := \{1\} \cup \{1 i_1 \ldots i_n \mid n > 0 , i_1, \ldots \in \mathbb{N}\}$. Die Elemente von $\underline{I}$ bezeichnen wir wie üblich mit $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}, \ldots$.

SATZ 15 (i) Falls für ein $\underline{j}$ und einen Satz P gilt: $\Box P \in M_{\underline{j}}$, so gilt für alle $\underline{i}$ $\Box P \in M_{\underline{i}}$.

(ii) Falls für ein $\underline{j}$ und Terme S, T vom Typ i gilt: $S = T \in M_{\underline{j}}$, so für alle $\underline{i}$ $S = T \in M_{\underline{i}}$.

Beweis: (i) Es ist entweder $\underline{j} = 1$, oder $M_{\underline{j}}$ ist Subordinate einer Menge $M_{\underline{k}}$. $M_{\underline{k}}$ muß nun $\Box P$ enthalten, denn angenommen, es wäre nicht der Fall: dann ist wegen der maximalen Konsistenz $\neg \Box P$, $\neg \Box P \rightarrow \Box \neg \Box P \in M_{\underline{k}}$ (Schema A7 !) und also $\Box \neg \Box P \in M_{\underline{k}}$, und $M_{\underline{j}}$ enthielte nach Konstuktion $\neg \Box P$, was aber der maximalen Konsistenz widerspricht.

Wenn wir obige Argumentationen iterieren, kommen wir dann dazu, daß auch M_1 den Satz $\Box P$ enthält. Nun ist $\Box P \rightarrow \Box\Box P$ Theorem von S5 (Hughes & Cresswell (1968), I,3) und somit von A_S , also auch in allen $M_{\underline{i}}$ wegen der maximalen Konsistenz. Demnach enthält M_1 $\Box\Box P$ und jede Subordinate $\Box P$ sowie dann wieder $\Box\Box P$.

Wenn wir diese Argumentation iterieren, kommen wir dazu, daß jedes $M_{\underline{i}}$ $\Box P$ enthält.

(ii) Wegen der maximalen Konsistenz enthält $M_{\underline{j}}$ den Satz $S = T \rightarrow \Box S = T$ (Schema A12 !) und demnach also auch $\Box S = T$. Nach Teil (i) enthalten dann alle $M_{\underline{i}}$ diesen Satz sowie wegen maximaler Konsistenz (Schema A5) den Satz $\Box S = T \rightarrow S = T$, somit also auch $S = T$.

SATZ 16 Seien P , Q Sätze, und für jede Menge $M_{\underline{i}}$ gelte: $P \in M_{\underline{i}} \Leftrightarrow Q \in M_{\underline{i}}$. Dann ist für alle $\underline{i}$ $\Box(P \leftrightarrow Q) \in M_{\underline{i}}$.

Beweis: Angenommen, ein $M_{\underline{i}}$ enthält nicht $\Box(P \leftrightarrow Q)$. Wegen der maximalen Konsistenz muß dann $\neg \Box(P \leftrightarrow Q)$ in $M_{\underline{i}}$ sein, und es existiert eine Subordinate $M_{\underline{j}}$ von $M_{\underline{i}}$, die $\neg (P \leftrightarrow Q)$ enthält. Nach Voraussetzung enthält $M_{\underline{j}}$

entweder P und Q oder keins von beiden: in diesem Fall sind aber wegen maximaler Konsistenz $\neg P$ und $\neg Q$ in $M_{\underline{i}}$. $M_{\underline{i}}$ enthält nun ebenfalls $P \to (Q \to (P \leftrightarrow Q))$, $\neg P \to (\neg Q \to (P \leftrightarrow Q))$ (Theoreme von A_S) und somit in jedem Fall $P \leftrightarrow Q$. Dies widerspräche aber der Annahme, daß $\neg (P \leftrightarrow Q) \in M_{\underline{i}}$; also kann kein $M_{\underline{i}}$ mit $\Box(P \leftrightarrow Q) \notin M_{\underline{i}}$ existieren.

Auf der Menge der Terme vom Typ i, in denen keine Variable frei vorkommt (mögen diese konstante Terme heißen), definieren wir nun eine Relation $\sim$: für konstante Terme T_1, T_2 gilt genau dann $T_1 \sim T_2$, wenn M_1 den Satz $T_1 = T_2$ enthält.

$\sim$ ist eine Äquivalenzrelation: die Reflexivität, Symmetrie und Transitivität ergibt sich dadurch, daß M_1 für konstante Terme T_1, T_2, T_3 die Sätze $T_1 = T_1$, $T_1 = T_2 \to T_2 = T_1$, $T_1 = T_2 \to (T_2 = T_3 \to T_2 = T_3)$ enthält (der erste ist ein Axiom, die beiden anderen sind Theoreme von A_S). Wir definieren dann:

DEF. 20 Sei T ein konstanter Term. Dann steht $\bar{T}$ für die Äquivalenzklasse, die T enthält d.h. $\bar{T} := \{T' \mid T' \sim T\}$.

Sei T ein Term der Form $\hat{}P$ (also vom Typ p), in dem keine Variable frei vorkommt. Dann steht $\bar{T}$ für die Menge $\{\underline{i} \mid P \in M_{\underline{i}}\}$.

SATZ 17 Seien $T_1, T_1', \ldots, T_n, T_n'$ Terme vom Typ i oder p, in denen keine freien Variablen vorkommen, und es gelte $(\bar{T}_1, \ldots, \bar{T}_n) = (\bar{T}_1', \ldots, \bar{T}_n')$. Dann gilt für alle f, A vom Typ $i(t_1,\ldots,t_n)$ bzw. $s(t_1,\ldots,t_n)$ (seien T_1, T_1' vom Typ t_1 usw.):

(i) $\overline{f(T_1,\ldots,T_n)} = \overline{f(T_1',\ldots,T_n')}$

(ii) für alle $\underline{i}$: $A(T_1,\ldots,T_n) \in M_{\underline{i}} \iff A(T_1',\ldots,T_n') \in M_{\underline{i}}$

Beweis: Aus der Prämisse folgt $(i = 1,\ldots,n)$ $\bar{T}_i = \bar{T}_i'$: falls T_i, T_i' konstante Terme, impliziert das $T_i \sim T_i'$, $T_i = T_i' \in M_1$ und nach SATZ 15 (ii) $T_i = T_i' \in M_{\underline{i}}$ für alle $\underline{i}$; falls $T_i = \hat{}P_i$, $T_i' = \hat{}P_i'$, so $\{\underline{i} \mid P_i \in M_{\underline{i}}\} = \{\underline{i} \mid P_i' \in M_{\underline{i}}\}$ und nach SATZ 16 $\Box(P_i \leftrightarrow P_i') \in M_{\underline{i}}$ für alle $\underline{i}$.

Es bezeichne Q_i dem Satz $T_i = T_i'$ bzw. $\Box(P_i \leftrightarrow P_i')$:

$(Q_1 \wedge \ldots \wedge Q_n) \to f(T_1,\ldots,T_n) = f(T_1',\ldots,T_n')$ sowie

$(Q_1 \wedge \ldots \wedge Q_n) \to (A(T_1,\ldots,T_n) = A(T_1',\ldots,T_n'))$ sind dann

Theoreme von A_S und somit in allen M_i . Somit enthalten diese auch $f(T_1,\dots,T_n) = f(T_1',\dots,T_n')$, $A(T_1,\dots,T_n) \leftrightarrow A(T_1',\dots,T_n')$. Aus der Definition von $\sim$ und der maximalen Konsistenz der M_i ergeben sich dann die Behauptungen des Satzes.

Wir können nun wie folgt eine Interpretation $\langle U , I , \mathfrak{F} \rangle$ der Sprache S einführen: sei $U := \{ \bar{T} \mid T$ konstanter Term $\}$, sei I die Menge der Indextupel der Subordinaten, und ergebe sich $\mathfrak{F}_i$ so:

(i) $\mathfrak{F}_i(a) := \bar{a}$, $\mathfrak{F}_i(x) \in U$, wobei für alle j $\mathfrak{F}_i(x) = \mathfrak{F}_j(x)$

(ii) Für alle A , f vom Typ $s(t_1,\dots,t_n)$ bzw. $i(t_1,\dots,t_n)$ ist

$\mathfrak{F}_i(A) := \{(\bar{T}_1,\dots,\bar{T}_n) \mid A(T_1,\dots,T_n) \in M_i\}$

$\mathfrak{F}_i(f) \in U^{M_1} \times \cdots \times M_n$, wobei $M_1 , \dots , M_n \in \{U , 2^I\}$ (vgl. DEF. 12) und für alle j $\mathfrak{F}_i(f) = \mathfrak{F}_j(f)$

Darüberhinaus soll folgende Bedingung erfüllt sein:

$(\mathfrak{F}_i(f))(\bar{T}_1 , \dots , \bar{T}_n) = \overline{f(T_1,\dots,T_n)}$

Zu den restlichen Bestimmungen vgl. DEF. 12 .

Man beachte, daß es uns nach SATZ 17 gestattet ist, $\mathfrak{F}_i(A)$ und $\mathfrak{F}_i(f)$ so zu definieren, wie es oben geschah. Nun gilt:

SATZ 18 Für jeden Term T , in dem keine Variable frei vorkommt, und für alle i gilt entweder $\mathfrak{F}_i(T) = \bar{T}$ oder $\mathfrak{F}_i(T) = \underline{\text{wahr}} \leftrightarrow T \in M_i$.

Beweis: (durch Induktion über den Grad der Terme) Für konstante Terme vom Grad o gilt per definitionem $\mathfrak{F}_i(a) = \mathfrak{F}_i(a) = \bar{a}$. Es möge der Satz nun für alle Terme der beschriebenen Art von maximalem Grad k gelten, und es sei

(i) $T := A(S_1,\dots,S_n)$, $\text{Grad}(S_1),\dots,\text{Grad}(S_n) \leq k$. Es gibt dann für alle i folgende Kette von Äquivalenzen:

$\mathfrak{F}_i(A(S_1,\dots,S_n)) = \underline{\text{wahr}} \leftrightarrow (\mathfrak{F}_i(S_1),\dots,\mathfrak{F}_i(S_n)) \in \mathfrak{F}_i(A)$
$\leftrightarrow (\bar{S}_1,\dots,\bar{S}_n) \in \{(\bar{T}_1,\dots,\bar{T}_n) \mid A(T_1,\dots,T_n) \in M_i\}$ (nach Induktionsannahme und obiger Definition von $\mathfrak{F}_i(\bar{A})$)
$\leftrightarrow A(S_1,\dots,S_n) \in M_i$.

Beim letzten "$\leftrightarrow$" ergibt sich die "$\Leftarrow$"-Richtung sofort. Zu "$\Rightarrow$" nehmen wir an, $(\bar{S}_1,\dots,\bar{S}_n)$ ist in $\mathfrak{F}_i(A)$: dann muß es gleich einem $(\bar{T}_1,\dots,\bar{T}_n)$, $A(T_1,\dots,T_n) \in M_i$, sein, und nach SATZ 17 ist auch $A(S_1,\dots,S_n)$ in M_i .

$T := f(S_1,\ldots,S_n)$, $Grad(S_1),\ldots,Grad(S_n) \leq k$. Dann gilt für alle i : $\mathfrak{I}_i(f(S_1,\ldots,S_n)) = (\mathfrak{I}_i(f))(\mathfrak{I}_i(S_1),\ldots,\mathfrak{I}_i(S_n)) = (\mathfrak{I}_i(f))(\bar{S}_1,\ldots,\bar{S}_n)$ (nach Induktionsannahme, und nach Definition von $\mathfrak{I}_i(f)$:) $= \overline{f(S_1,\ldots,S_n)}$.

(ii) Sei immer $Grad(P),Grad(Q) \leq k$; dann gilt für alle i , wenn $T := \neg P$: $\mathfrak{I}_i(\neg P) =$ wahr $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{I}_i(P) =$ falsch $\Leftrightarrow$ $P \notin M_i$ (nach Induktionsannahme) $\Leftrightarrow \neg P \in M_i$ (maximale Konsistenz).

$T := P \to Q$: $\mathfrak{I}_i(P \to Q) =$ falsch $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{I}_i(P) = \mathfrak{I}_i(\neg Q) =$ wahr $\Leftrightarrow$ $P, \neg Q \in M_i$ (nach Induktionsannahme) $\Leftrightarrow \neg(P \to Q) \in M_i$ $\Leftrightarrow P \to Q \notin M_i$ (wegen maximaler Konsistenz von M_i).

$T := \hat{}P$: $\mathfrak{I}_i(\hat{}P) = \{j \mid \mathfrak{I}_j(P) =$ wahr $\} = \{j \mid P \in M_j\}$ (nach Induktionsannahme) $= \hat{}P$.

$T := \Box P$: $\mathfrak{I}_i(\Box P) =$ wahr $\Leftrightarrow$ für alle j $\mathfrak{I}_j(P) =$ wahr $\Leftrightarrow$ für alle j $P \in M_j$ (nach Induktionsannahme). M_1 muß nun $\Box P$ enthalten, denn andernfalls wäre $\neg \Box P \in M_1$ und $\neg P$ in einer Subordinate. Da $\Box P \in M_1$, gilt nach SATZ 15 $\Box P \in M_i$. Umgekehrt folgt aus $\Box P \in M_i$ für alle j $\Box P \in M_j$ sowie $P \in M_j$ (Schema A5 und maximale Konsistenz der M_j).

(iii) $T :=$ $S = S'$, $Grad(S),Grad(S') \leq k$. Dann gilt für alle i : $\mathfrak{I}_i(S = S') =$ wahr $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{I}_i(S) = \mathfrak{I}_i(S')$ $\Leftrightarrow$ $\bar{S} = \bar{S}'$ (nach Induktionsannahme) $\Leftrightarrow$ $S \sim S'$ $\Leftrightarrow$ $S = S' \in M_1$ $\Leftrightarrow$ $S = S' \in M_i$ (nach SATZ 15) .

(iv) $T := \forall x\, P[x]$, $Grad(P[x]) = k$. Wir zeigen nun, daß für alle i gilt: $\mathfrak{I}_i(\forall x\, P[x]) =$ falsch $\Leftrightarrow$ $\forall x\, P[x] \notin M_i$.

"$\Rightarrow$" Die Prämisse impliziert, daß es eine a-Variante $\mathfrak{I}'$ von $\mathfrak{I}$ mit $\mathfrak{I}_i'(P[a]) =$ falsch gibt, wobei a nicht in $P[\,]$. Sei $\mathfrak{I}'(a) = \bar{S}$: nach Konstruktion von M_1 (vgl. Konstruktion der N_i) existiert eine Konstante b mit $S = b \in M_1$, also gilt $\bar{S} = \bar{b} = \mathfrak{I}_i(b) (= \mathfrak{I}_i'(a))$ und nach SATZ 7 $\mathfrak{I}_i'(P[a]) = \mathfrak{I}_i(P[b]) =$ falsch (da b "neue" Konstante ist, kann man a stets so wählen, daß es nicht in $P[b]$ vorkommt). Nach Induktionsannahme ist $P[b] \notin M_i$, also $\neg P[b] \in M_i$ sowie $\exists x \neg P[x] \in M_i$, also auch $\overline{\forall x\, P[x]} \notin M_i$ (wegen maximaler Konsistenz).

"$\Leftarrow$" Aus der Prämisse folgt: $\exists x \neg P[x] \in M_i$. Nun enthält M_i nach Konstruktion einen Satz $\exists x \neg P[x] \to \neg P[a]$ (wobei a nicht in $P[\,]$ vorkommt), also auch $\neg P[a]$ d.h. $P[a] \notin M_i$, und nach Induktionsannahme $\mathfrak{I}_i(P[a]) =$ falsch und somit $\mathfrak{I}_i(\forall x\, P[x]) =$ falsch .

Wir wollen nun die Sprache $\underline{S}$ wieder ohne die erwähnten "neuen" Konstanten $b_1, b_2, b_3, \ldots$ betrachten und den zweiten Hauptsatz dieses Kapitels formulieren:

SATZ 19 (Vollständigkeitssatz) Sei P eine Formel und N eine Menge von Formeln der Sprache $\underline{S}$. Dann gilt: folgt P aus N, so ist P auch aus N ableitbar.

Beweis: Wir zeigen zunächst: $M \models \forall P \Rightarrow M \vdash \forall P$, wobei $M := \{\forall Q \mid Q \in N\}$, oder anders ausgedrückt (wobei $P_o := \neg \forall P$): falls nicht $M \vdash \neg P_o$, so auch nicht $M \models \neg P_o$ d.h. ist P_o M-konsistent (vgl. DEF. 18), so gibt es eine Interpretation $\langle \underline{U}, \underline{I}, \underline{\Phi} \rangle$ und einen Index $\underline{i}$, so daß zwar M, aber nicht $\neg P_o$ $\underline{i}$-gültig bzw. $M \cup \{P_o\}$ $\underline{i}$-gültig ist. Wie man zu solcher Interpretation kommt, haben wir auf den vorigen Seiten gezeigt: nach Konstruktion enthält die Menge M_1 P_o und hat M als Teilmenge, und nach SATZ 18 ist $M \cup \{P_o\}$ 1-gültig. Damit sind die gesuchte Interpretation und der gesuchte Index gefunden (die Belegungen Φ_i sind natürlich nicht auf den "neuen" Konstanten definiert).
Aus $M \models \forall P \Rightarrow M \vdash \forall P$ folgt nun $N \models P \Rightarrow N \vdash P$: ist $N \models P$, so folgt dann nach DEF. 13,14 $M \models \forall P$ und also $M \vdash \forall P$. Es gibt also einen Beweis $P_1, \ldots, P_n$, $P_n := \forall P$, von $\forall P$ aus M; seien dabei $P_{i1}, \ldots, P_{im}$ diejenigen Sätze der Folge, die aus M sind, wobei gilt: $P_{ij} := \forall Q_j$, $Q_j \in N$ ($j=1,\ldots,m$; $i1,\ldots,im \in \{1,\ldots,n\}$). Dann gibt es einen Beweis $Q_1,\ldots,Q_m,\ldots,P_1,\ldots,P_n,\ldots,P$ von P aus N, wobei die P_{ij} u.a. durch Regel R2 aus den Q_j und P durch Schema A4 aus P_n entstehen. Es gilt also $N \vdash P$.

Wenn für eine Formel P oder Formelmenge M eine Interpretation $\langle \underline{U}, \underline{I}, \underline{\Phi} \rangle$ existiert, so daß P bzw. M für einen Index $\underline{i} \in \underline{I}$ $\underline{i}$-gültig ist, wollen wir einfach sagen, P bzw. M hat ein Modell. Dann gilt der folgende Satz:

SATZ 2o (Kompaktheitssatz) Sei M eine Menge von Formeln: falls jede endliche Teilmenge von M ein Modell hat, so besitzt auch die Menge M eines.

Beweis: Angenommen, M hat kein Modell. Dann besitzt auch die Menge M', $M' := \{\forall Q \mid Q \in M\}$, keines (vgl. DEF 13,14). In diesem Fall ist aus M' ein Satz der Form $\neg(P \vee \neg P)$ ableitbar, denn falls nicht $M' \vdash \neg(P \vee \neg P)$, so besäße die Menge $M' \cup \{P \vee \neg P\}$ ein Modell (vgl. Herleitung von SATZ 19), also auch M'. Falls aber $M' \vdash \neg(P \vee \neg P)$, so muß es eine endliche Teilmenge N' von M' mit $N' \vdash \neg(P \vee \neg P)$ geben, da der Beweis nur endlich viele Formeln umfaßt. Nach SATZ 1o gilt dann $N' \models \neg(P \vee \neg P)$, woraus sich sofort ergibt, daß N' kein Modell besitzt (besäße es eines, so müßte auch $\neg(P \vee \neg P)$ eins haben, was aber unmöglich ist). In diesem Fall hat auch die Menge N, $N := \{R \mid R \in M \text{ und } \forall R \in N'\}$, kein Modell (vgl. wieder DEF. 13,14), und somit existiert eine endliche Teilmenge von M ohne Modell.

Wir wollen eine Formelmenge genau dann widerspruchsfrei nennen, wenn aus ihr keine Formel der Form $\neg(P \vee \neg P)$ ableitbar ist. Dann gilt:

SATZ 21 Sei N eine Formelmenge. Dann sind die folgenden drei Behauptungen einander äquivalent:

(i) N ist konsistent.
(ii) N hat ein Modell.
(iii) N ist widerspruchsfrei.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii): für eine konsistente Menge N läßt sich analog zur Herleitung von SATZ 19 leicht eine Interpretation konstruieren, so daß N ein Modell besitzt (setze $M := \emptyset$, $N_1 := N$).
(ii) $\Rightarrow$ (iii): angenommen, N hätte ein Modell, aber $N \vdash \neg(P \vee \neg P)$. Dann gälte auch $N \models \neg(P \vee \neg P)$, und $\neg(P \vee \neg P)$ hätte ein Modell, was jedoch unmöglich ist.
(iii) $\Rightarrow$ (i): sei N nicht konsistent d.h. es gebe Formeln $P_1, \ldots, P_n \in N$ mit $\vdash \neg(P_1 \wedge \ldots \wedge P_n)$, oder anders geschrieben, $\vdash P_1 \rightarrow (P_2 \rightarrow (\ldots(P_{n-1} \rightarrow \neg P_n)\ldots))$. Da N $P_1, \ldots, P_{n-1}$ enthält, ergibt sich über mehrmaliges Anwenden von R1 : $N \vdash \neg P_n$; da $P_n \in N$ und $\vdash \neg P_n \rightarrow (P_n \rightarrow \neg(P \vee \neg P))$, erhalten wir sofort $N \vdash \neg(P \vee \neg P)$ für beliebiges P d.h. N ist nicht widerspruchsfrei.

DEF. 21 Seien $x_1, \dots, x_n$ voneinander verschiedene Variablen, $T_1, \dots, T_n$ Terme vom Typ i. Dann heißt die Menge $\{x_1 \leftarrow T_1, \dots, x_n \leftarrow T_n\}$ von Zeichenketten Substitution.

Wir bezeichnen Substitutionen mit kleinen griechischen Buchstaben; wenn wir die leere Menge als Substitution auffassen, nehmen wir ε.

Sei T ein Term vom Typ i oder s und σ, $\sigma := \{x_1 \leftarrow T_1, \dots, x_n \leftarrow T_n\}$, eine Substitution. Dann bezeichnet $T \circ \sigma$ einen Term, der wie folgt entsteht: falls notwendig, tauscht man gebundene Variablen von T aus, so daß $x_1, \dots, x_n$ sowie Variablen, die in $T_1, \dots, T_n$ frei vorkommen, in T nicht quantifiziert werden. Dann ersetzt man jedes Vorkommen von $x_1, \dots, x_n$ in T durch den jeweiligen Term $T_1, \dots, T_n$.

Für eine Formelmenge M gilt: $M \circ \sigma := \{P \circ \sigma \mid P \in M\}$.

DEF. 22 Seien $\sigma := \{x_1 \leftarrow T_1, \dots, x_n \leftarrow T_n\}$
$\xi := \{y_1 \leftarrow S_1, \dots, y_m \leftarrow S_m\}$ Substitutionen.
$\{x_1 \leftarrow T_1 \circ \xi, \dots, x_n \leftarrow T_n \circ \xi, y_{i1} \leftarrow S_{i1}, \dots, y_{ik} \leftarrow S_{ik}\}$
heißt dann Komposition von σ und ξ und wird mit $\sigma \circ \xi$ bezeichnet, wobei $y_{i1}, \dots, y_{ik}$ diejenigen Variablen aus $\{y_1, \dots, y_m\}$ sind, die nicht in $\{x_1, \dots, x_n\}$ sind.

Es gilt dann unmittelbar die folgende Gleichheitsbeziehung:
$(P \circ \sigma) \circ \xi = P \circ (\sigma \circ \xi)$

Wir führen nun den sog. Unifikationsalgorithmus ein, mit dem wir zu zwei gegebenen Formeln P, Q eine Substitution zu finden versuchen, deren Anwendung auf P und Q zur gleichen Formel führt. Bei der Bestimmung dieser Substitution gehen wir wie folgt vor:

(i) Eliminiere in P und Q alle doppelten Negationen und setze $k := o$, $\sigma_k := \varepsilon$.

(ii) Gehe von links durch die Formeln bis zur ersten Stelle, an der sie sich unterscheiden. Handelt es sich dabei um Variablen x, y, die auf $\forall$ folgen, so ersetze jedes Vorkommen von x, y durch eine Variable z, die sonst nirgends vorkommt. Handelt es sich um eine freie Variable x und um den Anfang eines

Terms T vom Typ i, in dem x nicht frei vorkommt, so benenne alle gebundenen Vorkommen von x um und ersetze dann alle Vorkommen von x durch T; erhöhe den Wert von k um 1 und setze $\sigma_k := \sigma_{k-1} \circ \{x \leftarrow T\}$.
Breche in allen anderen Fällen den Algorithmus ab.

(iii) Falls die Formeln noch verschieden sind, gehe zu Punkt (ii). Falls nicht, so ist σ_k die gesuchte Substitution und heißt Unifikator von P und Q.

Wir zeigen noch kurz, daß σ_k tatsächlich P und Q "unifiziert"; sei $\sigma_k := (\ldots(\varepsilon \circ \{x_1 \leftarrow T_1\}) \circ \{x_2 \leftarrow T_2\} \ldots) \circ \{x_n \leftarrow T_n\}$. Dann können wir $P \circ \sigma_k$ aber auch so schreiben (vgl. Bem. nach DEF. 22): $(\ldots((P \circ \varepsilon) \circ \{x_1 \leftarrow T_1\}) \circ \{x_2 \leftarrow T_2\} \ldots) \circ \{x_n \leftarrow T_n\}$ (analog bei Q), und genau diese Formel entstand auch im Laufe des Algorithmus.

Beispiel: Unifikation von $P(a, \hat{}\forall y\, Q(y,x))$, $P(z, \hat{}\forall x\, Q(x, f(z)))$

1. Schritt: bilde $P(a, \hat{}\forall y\, Q(y,x))$ / $P(a, \hat{}\forall x\, Q(x, f(a)))$ $\quad \sigma_1 := \varepsilon \circ \{z \leftarrow a\} = \{z \leftarrow a\}$

2. Schritt: bilde $P(a, \hat{}\forall u\, Q(u,x))$ / $P(a, \hat{}\forall u\, Q(u, f(a)))$ (Umbenennung gebundener Variablen)

3. Schritt: bilde $P(a, \hat{}\forall u\, Q(u, f(a)))$ / $P(a, \hat{}\forall u\, Q(u, f(a)))$ $\quad \sigma_2 := \sigma_1 \circ \{x \leftarrow f(a)\} = \{z \leftarrow a\ ,\ x \leftarrow f(a)\}$

Der Unifikator der beiden Formeln ist also die folgende Substitution: $\{z \leftarrow a\ ,\ x \leftarrow f(a)\}$.

Sei P eine Formel mit freien Variablen $x_1, \ldots, x_n$. Mit Umbenennung der freien Variablen bezeichnen wir dann die Anwendung einer Substitution $\{x_1 \leftarrow y_1, \ldots, x_n \leftarrow y_n\}$ auf P, wobei $y_1, \ldots, y_n$ voneinander verschiedene Variablen sind.

Wir betrachten von jetzt ab meist Mengen von Formeln, die wir Clausen nennen wollen. Die Formeln, die in diesen Mengen enthalten sind, seien mit Literals bezeichnet.

DEF. 23 Sei M eine Clause, die eine Formel P enthält. Wir sprechen genau dann von Skolemisierung von M zu M', wenn sich die Clause M' aus M durch Ersetzen von P durch ein Literal P' bzw. Literals P', P'' ergibt, wobei einer der folgenden Fälle vorliegt:

(i) $P := \neg\neg Q$, $P' := Q$

(ii) $P := \forall x Q$, $P' := Q$

(iii) $P := \neg\forall x Q$, $P' := \neg Q'$ bzw. $P := \exists x Q$, $P' := Q'$

Q' entsteht dabei aus Q , indem man jedes freie Vorkommen von x durch $f(y_1,\ldots,y_n)$ ersetzt, wobei $y_1, \ldots, y_n$ diejenigen Variablen sind, die neben x in Q frei vorkommen (durch Umbenennung gebundener Variablen sorge man dafür, daß keines der $y_1, \ldots, y_n$ in Q gebunden werden kann). Ist x die einzige freie Variable von Q , so ersetze man alle freien Vorkommen durch a . a und f seien dabei neue Konstanten vom Typ i bzw. $i(i,\ldots,i)$, die in der Sprache S bisher noch nicht enthalten waren.

(iv) $P := Q \rightarrow R$, $P' := \neg Q$, $P'' := R$ bzw.
$P := Q \vee R$, $P' := Q$, $P'' := R$

Die Clausen M' , M'' entstehen aus M durch Skolemisierung genau dann, wenn sich M' , M'' durch Ersetzen von P durch Literals P' bzw. P'' ergeben, wobei gilt:

$P := \neg(Q \rightarrow R)$, $P' := Q$, $P'' := \neg R$ bzw.
$P := Q \wedge R$, $P' := Q$, $P'' := R$

DEF. 24 Seien Clausen M , N gegeben. Dann entsteht eine Clause M' wie folgt durch Resolution aus M , N :

(i) Falls notwendig, nehme man eine Umbenennung freier Variablen in M oder N vor, damit keine Variable zugleich in einem Literal von M und einem von N frei vorkommt.

(ii) Man setze $M' := ((M - \{P\}) \cup (N - \{\neg Q\}))\cdot\sigma$, wobei $P \in M$, $\neg Q \in N$, σ Unifikator, der sich beim Unifikationsalgorithmus, angewandt auf P und Q , ergibt.

M' heißt Resolvent von M und N .

DEF. 25 Ein einfacher Resolutionsbeweis von einer Formel P aus einer Formelmenge M ist eine Folge $M_1, \ldots, M_n$ von Clausen, wobei Folgendes gilt:

M_1 entsteht aus $\{\neg \bigvee P\}$ durch maximales Hereinziehen der Quantoren (Ersetzen von $\bigvee x (Q \wedge R)$ durch $\bigvee x Q \wedge R$, falls x in R nicht frei vorkommt, usw.); M_n ist die leere Menge, als Clause aufgefaßt; jedes M_i $(1 < i \leq n)$ entsteht entweder durch Skolemisierung oder Resolution aus früheren Folgegliedern oder enthält als einziges Literal eine Formel aus M oder ein Axiom von A_S.

DEF. 26 (i) Jeder einfache Resolutionsbeweis einer Formel P aus einer Formelmenge M ist ein Resolutionsbeweis von P aus M.

(ii) Die Clausenfolge $M_1, \ldots, M_n$ ist ein Resolutionsbeweis von P aus M genau dann, wenn gilt: M_1 entsteht aus $\{\neg \bigvee P\}$ durch maximales Hereinziehen der Quantoren, M_n ist die leere Menge, jedes M_i $(1 < i \leq n)$ entsteht entweder durch Resolution oder Skolemisierung aus früheren Gliedern oder enthält als einziges Literal eine Formel aus M oder ein Axiom oder ist Teilmenge eines M_j $(j < i)$ der Form $\{\neg \square R\} \cup M_i$, wobei ein Resolutionsbeweis von R aus $\emptyset$ existiert.

(iii) Die Menge der Resolutionsbeweise ist die kleinste Menge, die die Bedingungen (i) und (ii) erfüllt.

Den in (ii) angeführten Ableitungsschritt von M_j zu M_i wollen wir Seitenresolution nennen. Wir definieren nun zu jedem Resolutionsbeweis die sog. Tiefe:

DEF. 27 (i) Die Tiefe eines einfachen Resolutionsbeweises ist o.

(ii) Sei $M_1, \ldots, M_n$ ein Resolutionsbeweis mit Seitenresolutionen, zu denen Resolutionsbeweise mit maximaler Tiefe k gehören (vgl. DEF. 26 (ii)). Dann besitzt $M_1, \ldots, M_n$ die Tiefe $k+1$.

SATZ 22 Existiert ein Resolutionsbeweis für eine Formel P aus einer Formelmenge M, so ist P aus M ableitbar bzw. folgt daraus.

Beweis: Wir zeigen den Satz durch Induktion über die Beweistiefe: Sei $M_1, \ldots, M_n$, $M_n := \emptyset$, ein einfacher Resolutionsbeweis, wobei M_n durch Resolution aus M_{n-1}, M_{n-2} entsteht. Wir

bilden nun wie folgt zu jedem M_i $(1 \leq i < n)$ eine Formel P_i: enthält M_i nur ein Literal, so sei dieses P_i, enthält M_i zwei oder mehr, so entsteht P_i durch Verknüpfung der Literals mit $\vee$. Dann gilt: entsteht ein M_i durch Skolemisierung oder Resolution aus einem M_j bzw. Clausen M_j, M_k $(j,k < i)$ und besitzt P_j bzw. P_j, P_k ein Modell, so hat auch P_i ein Modell.

Zum Beweise betrachten wir zunächst die Resolution: in diesem Fall ist P_i leicht aus $\{P_j, P_k\}$ abzuleiten (man bilde den Allabschluß und wende für die Substitution Axiomenschema 4 an; P_i ergibt sich dann vermittels Aussagenlogik), also folgt es auch daraus d.h. gilt in allen Modellen von P_j, P_k. Somit erhalten wir sofort die obige Behauptung.

Bei der Skolemisierung (vgl. DEF. 23) wollen wir nur (iii) genauer betrachten und zunächst den Fall $P_j := \neg \forall x\, Q[x]$ untersuchen: es möge für diese Formel ein Modell existieren d.h. ein Tripel $\langle \underline{U}, \underline{I}, \underline{\Phi} \rangle$ und ein $\underline{i}$ mit $\underline{\Phi}_{\underline{i}}(\neg \forall x\, Q[x]) = \underline{\text{wahr}}$. Dann gibt es eine a-Variante $\underline{\Phi}'$ (sei a die in (iii) erwähnte neue Konstante) mit $\underline{\Phi}'_{\underline{i}}(\neg Q[a]) = \underline{\text{wahr}}$. $\neg Q[a]$ hat also ein Modell, denn es ist $\underline{i}$-gültig in $\langle \underline{U}, \underline{I}, \underline{\Phi}' \rangle$, und wegen $P_i := \neg Q[a]$ ergibt sich obige Behauptung.

Sei nun $P_j := \neg \forall x\, Q[x, y_1, \ldots, y_m]$, und möge ein Tripel $\langle \underline{U}, \underline{I}, \underline{\Phi} \rangle$ und ein $\underline{i}$ mit $\underline{\Phi}_{\underline{i}}(\forall y_1 \ldots \forall y_m \neg \forall x\, Q[x, y_1, \ldots, y_m]) = \underline{\text{wahr}}$ existieren: dann gibt es zu jeder $b_1 \ldots b_m$-Variante $\underline{\Phi}'$ von $\underline{\Phi}$ eine a-Variante $\underline{\Phi}''$ von $\underline{\Phi}'$ mit $\underline{\Phi}''_{\underline{i}}(\neg Q[a, b_1, \ldots, b_m]) = \underline{\text{wahr}}$. Sei $\underline{\Psi}$ f-Variante von $\underline{\Phi}$, wobei f die erwähnte neue Konstante, und sei $\underline{\Psi}_{\underline{i}}(f)$ so definiert, daß für jede der obigen a-Varianten $\underline{\Phi}''$ gilt: $\underline{\Psi}_{\underline{i}}(f)(\underline{\Phi}''_{\underline{i}}(b_1), \ldots, \underline{\Phi}''_{\underline{i}}(b_m)) = \underline{\Phi}''_{\underline{i}}(a)$. Dann gilt für jede $b_1 \ldots b_m$-Variante $\underline{\Psi}'$ von $\underline{\Psi}$: $\underline{\Psi}'_{\underline{i}}(\neg Q[f(b_1, \ldots, b_m), b_1, \ldots, b_m]) = \underline{\text{wahr}}$ (wähle das passende $\underline{\Phi}''$ mit $\underline{\Phi}''_{\underline{i}}(b_1) = \underline{\Psi}'_{\underline{i}}(b_1)$ usw.), also auch Folgendes: $\underline{\Psi}_{\underline{i}}(\forall y_1 \ldots \forall y_1 \neg Q[f(y_1, \ldots, y_m), y_1, \ldots, y_m]) = \underline{\text{wahr}}$. Somit ist P_i d.h. $\neg Q[f(y_1, \ldots, y_m), y_1, \ldots, y_m]$ $\underline{i}$-gültig in $\langle \underline{U}, \underline{I}, \underline{\Psi} \rangle$, hat also ein Modell, womit obige Behauptung gezeigt ist.

Die Fälle $P_j := \neg \forall x\, Q[x] \vee R$, $P_j := \neg \forall x\, Q[x, y_1, \ldots, y_m] \vee R$ seien nicht näher untersucht; unsere Behauptung ergibt sich aber hier durch eine einfache Verallgemeinerung der obigen zwei Fälle. Bei den anderen Arten der Skolemisierung ist P_i immer leicht aus $\{P_j\}$ abzuleiten bzw. folgt daraus, und wir erhalten dann auch hier die gewünschte Behauptung.

Angenommen, die Formel P_1, also $\neg \forall P$, und die Formeln aus M besitzen ein Modell. Da die Axiome von A_S stets ein Modell haben,

ergibt sich aus der gerade gezeigten Behauptung, daß auch die Formeln P_{n-2} und P_{n-1} ein Modell haben müssen. Aus den diesen Formeln entsprechenden Clausen M_{n-2}, M_{n-1} erhalten wir durch Resolution die leere Clause, aus $\{P_{n-2}, P_{n-1}\}$ ist dann eine Formel der Gestalt $\neg Q \wedge Q$ ableitbar, die somit ebenfalls ein Modell hätte. Das ist aber unmöglich, ergo besitzen $\neg \bigvee P$ und die Formeln aus M kein gemeinsames Modell d.h. jedes Modell der Formeln aus M ist eines von $\bigvee P$, und demnach gilt $M \models P$ bzw. $M \vdash P$.

Möge der Satz für alle Resolutionsbeweise mit maximaler Tiefe k gelten, und sei $M_1, \ldots, M_n$ ein Beweis der Tiefe $k+1$. Wir bilden nun wieder aus dem(den) Literal(s) von M_i $(1 \leq i < n)$ die Formel P_i, und es gilt: entsteht M_i durch Skolemisierung, Seitenresolution oder Resolution aus M_j bzw. M_j, M_l $(j,l < i)$ und besitzt P_j bzw. P_j, P_l ein Modell, so auch P_i.
Wir brauchen dies hier nur für die Seitenresolution zu zeigen (für Skolemisierung und Resolution vgl. den ersten Teil des Beweises): sei $P_j := \neg \Box R \vee Q$, $P_i := Q$, und es gebe einen Resolutionsbeweis für R aus $\emptyset$ mit maximaler Tiefe k. Dann ist nach Induktionsannahme R aus $\emptyset$ ableitbar und somit auch $\Box R$ (vgl. DEF. 16), also sind aus $\{\neg \Box R \vee Q\}$ die Formeln $\Box R \rightarrow Q$ und $\Box R$ und mit modus ponens Q ableitbar. Q folgt demnach aus $\{\neg \Box R \vee Q\}$, und wir erhalten die gewünschte Behauptung.

Falls sich nun M_n d.h. die leere Clause durch Resolution ergibt, so können wir analog zum ersten Teil des Beweises (siehe oben) den Nachweis unseres Satzes abschließen. Falls sich M_n o.B.d.A. aus M_{n-1} durch Seitenresolution ergibt, müssen wir wie folgt vorgehen: M_{n-1} enthält als einziges Literal eine Formel der Form $\neg \Box R$ d.h. P_{n-1}, wobei ein Resolutionsbeweis von R aus $\emptyset$ existiert, R und $\Box R$ also aus $\emptyset$ folgen. Angenommen, P_1 d.h. $\neg \bigvee P$ und die Formeln aus M haben ein Modell. Dann ergibt sich, daß auch P_{n-1} eines haben müßte: in diesem Fall besäßen $\neg \Box R$ und $\Box R$ ein gemeinsames Modell, was aber nicht sein kann. Ergo haben $\neg \bigvee P$ und die Formeln aus M ebenfalls kein gemeinsames Modell, und demnach gilt leicht, daß P aus M folgt bzw. ableitbar ist. Damit ist der Beweis beendet.

(Man beachte, daß es hier zwei "Arten" von Formelmengen gibt: einmal die Clausen und zum anderen die Mengen, aus denen Formeln abgeleitet werden bzw. folgen. Clausen sind im Grunde nur andere Schreibweisen von Disjunktionen, ein Komma bedeutet soviel wie $\vee$; in den "normalen"

Formelmengen hat das Komma, wenn überhaupt, eine mehr konjunktive Bedeutung.)

I.a. kann man zu einer Formel und einer Prämissenmenge leichter einen Resolutionsbeweis als einen "gewöhnlichen" Beweis (vgl. DEF. 16) finden, da man beim Resolutionsbeweis von der zu beweisenden Formel ausgeht. Natürlich muß man dann geeignete Prämissen und Axiome auswählen, um den Beweis fortzuführen, jedoch scheint es hierbei möglich zu sein, gewisse heuristische Auswahlmethoden heranzuziehen. Es ist denkbar, Resolutionsbeweise auf einem Computer durchzuführen, und wir wollen in diesem Zusammenhang auf die reichhaltige Literatur zum Thema Künstliche Intelligenz und Maschinelles Beweisen verweisen.

Zum Abschluß sei ein Resolutionsbeweis der Tiefe 2 näher ausgeführt, und zwar von $\forall x \Box F(x) \rightarrow \Box \forall x F(x)$ aus $\emptyset$ (R = Resolution , Sk = Skolemisierung) :

(1)	$\{\neg(\forall x \Box F(x) \rightarrow \Box \forall x F(x))\}$	negierte Behauptung
(2)	$\{\ \forall x \Box F(x)\ \}$	Sk (1)
(3)	$\{\neg \forall x \Box F(x)\ ,\ \neg \Box \neg \forall x \Box F(x)\}$	Sk $\{\Box \neg \forall x \Box F(x) \rightarrow \neg \forall x \Box F(x)\}$ (A5)
(4)	$\{\neg \Box \neg \forall x \Box F(x)\}$	R (2)(3)
(5)	$\{\Box \neg \Box \neg \forall x \Box F(x)\ ,\Box \neg \forall x \Box F(x)\}$	Sk $\{\neg \Box \neg \forall x \Box F(x) \rightarrow \Box \neg \Box \neg \forall x \Box F(x)\}$ (A7)
(6)	$\{\Box \neg \Box \neg \forall x \Box F(x)\}$	R (4)(5)
(7)	$\{\neg \Box (\neg \Box \neg \forall x \Box F(x) \rightarrow \forall x F(x)),\ \neg \Box \neg \Box \neg \forall x \Box F(x)\ ,\ \Box \forall x F(x)\}$	Sk $\{\Box(\ldots \rightarrow \ldots) \rightarrow (\Box \ldots \rightarrow \Box \ldots)\}$ (A6)
(8)	$\{\neg \Box (\neg \Box \neg \forall x \Box F(x) \rightarrow \forall x F(x)),\ \Box \forall x F(x)\}$	R (6)(7)
(9)	$\{\neg \Box \forall x F(x)\}$	Sk (1)
(1o)	$\{\neg \Box (\neg \Box \neg \forall x \Box F(x) \rightarrow \forall x F(x))\}$	R (8)(9)
(11)	$\emptyset$	Seitenresolution (1o)

Beim letzten Ableitungsschritt existiert nun ein Resolutionsbeweis von $\neg \Box \neg \forall x \Box F(x) \rightarrow \forall x F(x)$ aus $\emptyset$:

(1)	$\{\neg (\neg \Box \neg \forall x \Box F(x) \rightarrow \forall x F(x))\}$	negierte Behauptung
(2)	$\{\neg \forall x F(x)\}$	Sk (1)
(3)	$\{\ \neg F(a)\}$	SK (2)

(4) $\{\neg\Box F(a)\ ,\ F(a)\}$ Sk $\{\Box F(a) \to F(a)\}$ (A5)

(5) $\{\neg\Box F(a)\ \}$ R (3)(4)

(6) $\{\ \Box F(a)\ ,\Box\neg\Box F(a)\ \}$ Sk $\{\neg\Box F(a) \to \Box\neg\Box F(a)\}$ (A7)

(7) $\{\ \Box\neg\Box F(a)\ \}$ R (5)(6)

(8) $\{\ \neg\Box(\neg\Box F(a) \to \neg\forall x\Box F(x)),\ \neg\Box\neg\Box F(a)\ ,\Box\neg\forall x\Box F(x)\}$ Sk $\{\Box(\ldots) \to (\Box\neg\Box F(a) \to \Box\neg\forall x\Box F(x))\}$ (A6)

(9) $\{\ \neg\Box(\neg\Box F(a) \to \neg\forall x\Box F(x)),\ \Box\neg\forall x\Box F(x)\ \}$ R (7)(8)

(1o) $\{\ \neg\Box\neg\forall x\Box F(x)\ \}$ Sk (1)

(11) $\{\ \neg\Box(\neg\Box F(a) \to \neg\forall x\Box F(x))\}$ R (9)(1o)

(12) $\emptyset$ Seitenresolution (11)

Beim letzten Ableitungsschritt existiert ein einfacher Resolutions-beweis von $\neg\Box F(a) \to \neg\forall x\Box F(x)$ aus $\emptyset$:

(1) $\{\neg(\neg\Box F(a) \to \neg\forall x\Box F(x))\}$ negierte Behauptung

(2) $\{\forall x\Box F(x)\}$ Sk (1)

(3) $\{\ \Box F(x)\}$ Sk (2)

(4) $\{\ \neg\Box F(a)\}$ Sk (1)

(5) $\emptyset$ R (3)(4) mit Unifikator $\{x \leftarrow a\}$

Literaturverzeichnis:

Carnap, R.: Bedeutung und Notwendigkeit, Wien 1972

Carnap, R.: Modality and Quantification, Journal of Symbolic Logic 11(1946)

Chang, C.-L. & Lee, R. C.-T.: Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving, New York 1973

Frege, G.: Funktion, Begriff, Bedeutung (ed. G. Patzig), Göttingen 1962

Gallin, D.: Intensional and Higher - Order Modal Logic, Amsterdam 1975

Hintikka, J. (ed.): Rudolf Carnap, Logical Empirist, Dordrecht 1975

Hobbs, J. R. & Rosenschein, S. J.: Making Computational Sense of Montague's Intensional Logic, Artificial Intelligence 9(1977)

Hughes, G. E. & Cresswell, M. J.: An Introduction to Modal Logic, London 1968

Jaśkowski, S.: On the Modal and Causal Functions in Symbolic Logic, Studia Philosophica IV.1(1951)

Kripke, S. A.: Naming and Necessity, in: Davidson, D. & Harman, G. H. (eds.): Semantics of Natural Language, Dordrecht 1972

Kutschera, F. v.: Einf. in die intensionale Semantik, Berlin 1976

Lewis, D.: Counterfacutals, Oxford 1973

Lewis, D.: General Semantics, Synthese 22(197o)

Montague, R.: Formal Philosophy, New Haven 1974

Prestel, A.: Mathematische Logik I (Vorlesung), Bonn WS 73/74

Schilpp, P. A. (ed.): The Philosophy of Rudolf Carnap, La Salle 1963

Schmidt, S. J. (ed.): Pragmatik/Pragmatics II, München 1976

Stegmüller, W.: Hauptströmungen der Gegenwartsphilosophie, Stuttgart 1975

Wrightson, G.: A Proof Procedure for Higher - Order Modal Logic, 4. International Conference on Automated Deduction, Austin 1979

Lebenslauf:

Ich wurde am 22.4.53 als Sohn des Kranführers Günter Bülow und seiner Frau Erika Bülow geb. Purwin in Gelsenkirchen - Buer geboren. Vom 19.4.59 bis Ostern 1963 besuchte ich in Gelsenkirchen die Grundschule, anschließend das Mathematisch - Naturwissenschaftliche Gymnasium, das ich am 26.5.71 mit dem Abitur abschloß. Am 6.8.71 immatrikulierte ich mich an der Universität Bonn und begann ein Studium der Informatik mit Nebenfach Mathematik. Das Vordiplom in Mathematik erhielt ich am 17.1o.73, das Diplom in Informatik am 14.2.77. Im Wintersemester 75/76 begann ich außerdem ein Studium der Philosophie, im Wintersemester 76/77 eines der Anglistik; in beiden Fächern schloß ich das Grundstudium ab. Darüberhinaus hörte ich Vorlesungen in Geschichte und Kunstgeschichte. Seit 1977 arbeite ich an meiner Promotion in Mathematik mit Nebenfach Philosophie. Am 18.1o.77 wurde ich in die Promotionsförderung der Konrad - Adenauer - Stiftung aufgenommen.